

Verbandstheoretische Deutung
des Projektionsmaßes

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Gerhard Rose
aus Berlin

1963

Druck:
ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e.V.
DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE
1 Berlin 33, Garystr. 45

Verbandstheoretische Deutung
des Projektionsmaßes

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin



vorgelegt von
Gerhard Rose
aus Berlin

1. Referent: Professor Dr. P a c h a l e

2. Referent: Professor Dr. G r o t e m e y e r

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Februar 1963

Tag der Promotion: 24. Juli 1963



I n h a l t :

A. Einleitung	S. 4
B. Definition des Verbandsmaßes	S. 7
C. Fortsetzung des Verbandsmaßes	S. 18
D. Produktbildung und -zerlegung	S. 26
E. Die singuläre Zerlegung	S. 36
F. Der Hilbert-Verband	S. 40
Literatur	S. 55
Lebenslauf	S. 58

A. Einleitung

Zur Spektraldarstellung der selbstadjungierten und normalen Operatoren im Hilbert-Raum werden bekanntlich Projektionsmaße benötigt, Abbildungen P der reellen oder komplexen Borelmengenfamilie in die Menge der Projektoren des Hilbertraumes, derart daß P_x (definiert durch $P_x(E) = \langle P(E)x, x \rangle$ für eine Borelmenge E) für jeden Vektor x des Hilbertraumes X ein positives σ -Maß ist (Wir benutzen also die Terminologie, die von einem "Maß" nur die endliche Additivität fordert. Ein abzählbar-additives Maß heißt σ -Maß).

Verbandstheoretisch gedeutet ist ein Projektionsmaß - da sich Projektoren und abgeschlossene lineare Unterräume des Hilbertraumes, die Elemente des "Hilbert-Verbandes", eineindeutig entsprechen - ein σ -Homomorphismus des σ -Körpers der Borelmengen in eine vollständige Boole'sche Unterualgebra des Hilbertverbandes (dies wird genauer im letzten Kapitel ausgeführt). Daher bietet sich folgende verbandstheoretische Verallgemeinerung des Projektionsmaßes an: Ein σ -Homomorphismus einer Boole'sche σ -Algebra B in eine Boole'sche σ -Algebra M heiße Verbandsmaß.

Für ein allgemeines Verbandsmaß wird man nun allerdings noch keine befriedigende Maßtheorie aufbauen können. Beachtet man jedoch, daß die vollständigen Boole'schen Algebren des Hilbert-Verbandes im separablen Fall effektiv, im allgemeinen Fall zumindest quasi-effektiv sind, so ist folgende Definition nahelegend: Ein Verbandsmaß heißt effektiv, falls seine Wertealgebra effektiv, quasi-effektiv, falls seine Wertealgebra quasi-effektiv ist.

Dabei heißt eine Boole'sche σ -Algebra M effektiv, falls es auf ihr ein effektives σ -Maß μ gibt. Ein System von Maßen μ_i , $i \in I$ auf M (und

entsprechend ein einzelnes Maß μ auf M) heißt effektiv, falls aus $a \in B$ und $\mu_i(a) = 0$ für alle $i \in I$ folgt: $a = 0$. Eine vollständige Boole'sche Algebra soll nun quasi-effektiv heißen, falls es auf ihr ein effektives System von vollkommenen Maßen gibt. Dabei ist ein Maß μ auf M vollkommen, falls aus $\bigcap_{i \in I} a_i = 0$, $a_i \in M$ schon folgt, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ endlich-viele a_{ik} , $k = 1, 2 \dots n$ gibt mit $\mu(\bigcap_{k=1}^n a_{ik}) \leq \varepsilon$. Ein vollkommenes Maß ist insbesondere stetig nach unten, also σ -Maß.

Für effektive (und auch für quasi-effektive) Verbandsmaße läßt sich nun eine vollständige Maßtheorie aufbauen. Dies soll in dieser Arbeit geschehen. Im wesentlichen handelt es sich hierbei um Sätze über die Fortsetzung von σ -Homomorphismen. Das letzte Kapitel enthält dann eine detailliertere Diskussion der Beziehungen zwischen effektivem Verbandsmaß, Projektionsmaß und Boole'schen Unteralgebren des Hilbertverbandes.

Versteht man unter einem Mengenverbandesmaß ein Verbandsmaß, dessen Wertealgebra ein σ -Körper ist, so ist interessant zu bemerken, daß die entsprechenden Fortsetzungssätze bekanntlich auch für Mengenverbandesmaße gültig sind (R.Sikorski: On an analogy between measure and homomorphism). Die effektiven Boole'schen Algebren, insbesondere die Unter-algebren des Hilbertverbandes, sind aber, von trivialen Fällen abgesehen, nicht vollständigen Mengenkörpern isomorph und stellen sogar einen gewissen Gegensatz zu den Mengenkörpern dar (Es gibt vollständige atomlose Boole'sche Algebren des separablen Hilbertverbandes, während bekanntlich genau die atomaren vollständigen Boole'schen Algebren zu vollständigen Mengenkörpern isomorph sind).

Insgesamt zeigt die Arbeit also, daß die Theorie des Projektionsmaßes als Spezialfall des quasi-effektiven Verbandsmaßes rein maß- und verbandstheoretisch entwickelt werden kann, ohne auf die algebraische, lineare Struktur der Projektoren zurückzugreifen.

B. Definition des Verbandsmaßes

Vorbemerkung 1: Sei M σ -vollständige Boole'sche Algebra und μ effektives, normiertes Maß auf M .

(M, μ) soll Maßalgebra heißen. Wir definieren:

$$\delta(a, b) = \mu(a+b) \text{ für } a, b \in M \quad (a+b \stackrel{\text{def}}{=} (a \cup b) - (a \cap b))$$

sei die "symmetrische Differenz" oder "algebraische Summe" des Boole'schen Ringes. Es gilt: $a+b = 0 \Leftrightarrow a = b$!).

$a = \bigcup_{i \in I} a_i$ ist eine Abkürzung für

$a = \bigcup_{i \in I} a_i$ und: die $a_i, i \in I$ sind paarweise disjunkt. Entsprechend bedeutet $a = \biguplus_{i=1}^{\infty} a_i$:

$a = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$ und: die $a_i, i = 1, 2, \dots$ sind steigend:

$a_i \subseteq a_{i+1}$. Genauso: $a = \bigcap_{i=1}^{\infty} a_i \Leftrightarrow a = \bigcap_{i=1}^{\infty} a_i$ und:

die a_i sind fallend: $a_i \supseteq a_{i+1}$.

Satz 1: a) δ ist Metrik.

$$b) 1. \delta(a \cup b, c \cup d) \leq \delta(a, c) + \delta(b, d)$$

$$2. \delta(a \cap b, c \cap d) \leq \delta(a, c) + \delta(b, d)$$

$$3. \delta(a', b') = \delta(a, b)$$

$$4. \delta(a-b, c-d) \leq \delta(a, c) + \delta(b, d)$$

(Dies besagt unter anderem die Stetigkeit von

$\cup, \cap, ', -$ bezüglich δ).

Beweis 1: a) 1. Offenbar ist $\delta(a, b) \geq 0$ für $a, b \in M$

$$2. \delta(a, b) = 0 \Leftrightarrow \mu(a+b) = 0 \Leftrightarrow a+b = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = b$$

$$3. \text{ Offenbar gilt: } \delta(a, b) = \delta(b, a)$$

4. $\delta(a, c) \leq \delta(a, b) + \delta(b, d)$. Denn es gilt:

$$(a+b)+(b+c) = a+(b+b)+c = a+c, \text{ also } a+c \subseteq (a+b) \cup (b+c),$$

also, da μ superadditiv ist: $\mu(a+c) \leq \mu(a+b) + \mu(b+c)$

b) 1. I. Es gilt $\delta(a \cup b, a \cup c) \leq \delta(b, c)$, denn:

$$(a \cup b) + (a \cup c) = (b+c) - a \quad (\text{da } (a \cup b) \cap (a \cup c)' =$$

$$(a \cup b) \cap a' \cap c' = (b \cap c') \cap a', \quad (a \cup b)' \cap (a \cup c) =$$

$$a' \cap b' \cap (a \cup c) = (b' \cap c) \cap a', \text{ also } (a \cup b) + (a \cup c) =$$

$$(b+c) \cap a' \quad), \text{ also sicher } (a \cup b) + (a \cup c) \subseteq b+c$$

II. Daher gilt $\delta(a \cup b, c \cup d) \leq \delta(a \cup b, a \cup d) + \delta(a \cup d, c \cup d) \leq \delta(b, d) + \delta(a, c)$

2. Da $(a \cap b) + (a \cap c) = ab + ac = a(b+c) =$

$a \cap (b+c) \subseteq b+c$ gilt: $\delta(a \cap b, a \cap c) \leq \delta(b, c)$. Daraus folgt wie oben 2.

3. Denn es gilt: $a+b = (a \cup b) \cap (a' \cup b')$

$$= a' + b'$$

4. $\delta(a-b, c-d) = \delta(a \cap b', c \cap d') \leq$

$$\delta(a, c) + \delta(b', d') \leq \delta(a, c) + \delta(b, d)$$

Definition 1: a) $a_n \rightarrow_{\text{top}} a$ bedeute $\delta(a_n, a) \rightarrow 0$ (also Konvergenz in der durch δ bestimmten Topologie)

b) $a_n \rightarrow_{\text{m}} a$ bedeute die mengentheoretische (verbandstheoretische) Konvergenz: also bei $\bar{a}_n = \text{df } \bigcup_{i=n}^{\infty} a_i, \underline{a}_n = \text{df } \bigcap_{i=n}^{\infty} a_i$ ($\underline{a}_n \subseteq a_n \subseteq \bar{a}_n, a_{-n} \subseteq \underline{a}_{n+1}, \bar{a}_n \supseteq \bar{a}_{n+1}$) gilt mit $\underline{a} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underline{a}_n, \bar{a} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n : a = \underline{a} = \bar{a}$

Satz 2: Gilt $a_n \rightarrow_{\text{m}} a$, so folgt: $a_n \rightarrow_{\text{top}} a$

Beweis 2: Da $\underline{a}_n \subseteq a_n \subseteq \bar{a}_n$, gilt: $\delta(a, a_n) \leq \delta(a_n, \bar{a}_n) + \delta(\bar{a}_n, a) \leq \delta(\underline{a}_n, \bar{a}_n) + \delta(\bar{a}_n, a) \leq \delta(\underline{a}_n, a) + \delta(\bar{a}_n, a) + \delta(\bar{a}_n, a)$. Da nun aber

$a = \underline{a} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underline{a}_i$, gilt wegen der Stetigkeit nach oben von μ : $\delta(a, \underline{a}_n) = \mu(\underline{a}) - \mu(\underline{a}_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ und ebenso wegen der Stetigkeit nach unten: $\delta(a, \bar{a}_n) \rightarrow 0$, also auch $\delta(a, a_n) \rightarrow 0$, also $a_n \rightarrow_{\text{top}} a$.

Satz 3: Ist (a_n) Cauchy-Folge, so gibt es Teilfolge $(b_k) = (a_{n_k})$ und $b \in M$ mit $b_k \rightarrow_m b$.

Beweis 3: Seien $\eta_k > 0$ positive Zahlen mit $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k$ konvergent. Sei $\varepsilon_n = \sum_{k=n}^{\infty} \eta_k$. Dann gilt $\varepsilon_n \downarrow 0$.

Da (a_n) eine Cauchy-Folge ist, gibt es sicher eine Teilfolge $b_k = a_{n_k}$ mit $\delta(b_k, b_{k+1}) \leq \eta_k$. Dann gilt auch: $\delta(\bigcup_{i=n}^{n+k} b_i, \bigcup_{i=n}^{n+k+1} b_i) =$

$\delta(\bigcup_{i=n}^{n+k} b_i \cup b_{n+k}, \bigcup_{i=n}^{n+k} b_i \cup b_{n+k+1}) \leq \delta(b_{n+k}, b_{n+k+1}) \leq \eta_{n+k}$, so daß mit der Dreiecksungleichung folgt:

$\delta(b_n, \bigcup_{i=n}^{n+k+1} b_i) \leq \eta_n + \eta_{n+1} + \dots + \eta_{n+k} \leq \varepsilon_n$. Aus

$\delta(b_n, \bigcup_{i=n}^{n+k+1} b_i) \leq \varepsilon_n$ für alle $k = 0, 1, 2, \dots$ folgt, da $\bigcup_{i=n}^{n+k+1} b_i$ für $k \rightarrow \infty$ mengentheoretisch, also auch topologisch, gegen $\bar{b}_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} b_i$ geht, : $\delta(b_n, \bar{b}_n) \leq \varepsilon_n$.

Ebenso folgt $\delta(\underline{b}_n, \underline{b}_n) \leq \varepsilon_n$, also insgesamt:

$\delta(\underline{b}_n, \bar{b}_n) \leq 2\varepsilon_n$. Da $\delta(\underline{b}, \bar{b}) = \mu(\bar{b}) - \mu(\underline{b}) \leq \mu(\bar{b}_n) - \mu(\underline{b}_n)$ gilt auch $\delta(\underline{b}, \bar{b}) \leq 2\varepsilon_n$ für jedes n , also, da $\varepsilon_n \downarrow 0$:

$\delta(\underline{b}, \bar{b}) = 0, \underline{b} = \bar{b}$. Also gilt: $b_k \rightarrow_m b =_{\text{df}} \underline{b} = \bar{b}$.

Satz 4: a) Der metrische Raum (M, δ) ist vollständig

b) $a_n \rightarrow_{\text{top}} a$ impliziert: Es gibt Teilfolge

(a_{n_k}) mit $a_{n_k} \rightarrow_m a, k \rightarrow \infty$.

Beweis 4: a) Ist (a_n) also eine Cauchy-Folge, so gibt es eine Teilfolge (a_{n_k}) , die mengentheoretisch, also auch topologisch, gegen ein $a \in M$ konvergiert. Da (a_n)

aber Cauchy-Folge, geht auch (a_n) topologisch gegen $a \in M$. (M, δ) ist also metrisch-vollständig.

b) Gilt $a_n \rightarrow_{\text{top}} a$, so ist (a_n) sicher Cauchy-Folge. Es gibt also Teilfolge $b_k = a_{n_k}$ mit $b_k \rightarrow_m b$. Da aber dann auch $b_k \rightarrow_{\text{top}} b$ und (b_k) als Teilfolge von (a_n) auch topologisch gegen a geht, muß $a=b$ sein. Also gilt: $a_{n_k} \rightarrow_m a$.

Satz 5: a) Eine Menge $A \subseteq M$ ist genau dann topologisch-abgeschlossen, wenn sie gegen mengentheoretische Limites abgeschlossen ist. (Also: alle effektiven, normierten σ -Maße auf M erzeugen dieselbe Topologie).

b) Ein Ring (bezüglich der Ring- und σ -Ring-Terminologie siehe Halmos, Measure Theory) ist genau dann σ -Ring, wenn er topologisch-abgeschlossen ist.

c) Jeder Berührungspunkt einer Menge $A \subseteq M$ ist abzählbarer Durchschnitt von abzählbaren Vereinigungen von A -Elementen. (Ebenso gilt das Duale: ist abzählbare Vereinigung von abzählbaren Durchschnitt von A -Elementen).

d) Der topologische Abschluß eines Ringes ist wieder ein Ring (und daher sogar σ -Ring).

Beweis 5: a) I. Sei A topologisch-abgeschlossen und sei $a_n \rightarrow_m a$ mit $a_n \in A$. Da dann auch $a_n \rightarrow_{\text{top}} a$, gilt $a \in A$. A ist also gegen mengentheoretische Limites abgeschlossen.

II. Sei nun A gegen mengentheoretische Limites abgeschlossen und sei a Berührungspunkt von A .

Es gibt dann eine Folge (a_n) mit $a_n \in A$ und $a_n \xrightarrow{\text{top}} a$.
(1. Abzählbarkeitsaxiom in metrischen Räumen). Also gibt es eine Teilfolge $(b_k) = (a_{n_k})$ mit $b_k \xrightarrow{m} a$, also gilt $a \in A$, da $b_k \in A$. Also ist A topologisch-abgeschlossen.

b) I. Ein σ -Ring ist offenbar gegen mengentheoretische Limites abgeschlossen, also auch topologisch-abgeschlossen.

II. Ein topologisch-abgeschlossener Ring ist offenbar gegen aufsteigende σ -Vereinigungen abgeschlossen, da diese mengentheoretische Limites sind. Also ist er σ -Ring.

c) Denn jeder Berührungspunkt von A ist Mengengrenze von A -Elementen.

d) Denn $\cup, \cap$ - sind stetig bezüglich δ .

Satz 6: a) Sei $a_i \in M$, $i \in I$, $I \neq \emptyset$. Dann existiert $\bigcup_{i \in I} a_i$, und es gibt schon abzählbar-viele a_{i_k} , $k = 1, 2, \dots$, mit $\bigcup_{i \in I} a_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$ ("Abzählbarkeit der Vereinigung")

b) Sei $a_i \in M$ für $i \in I$, $I \neq \emptyset$. Dann existiert $\bigcap_{i \in I} a_i$, und es gibt schon abzählbar-viele a_{i_k} , $k = 1, 2, \dots$, mit $\bigcap_{i \in I} a_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$. (Abzählbarkeit des Durchschnitts)

c) M ist vollständig (als Verband)

d) Jeder σ -Ring $S \subseteq M$ ist vollständig (als Unterverband von M)

Beweis 6: a) Sei A die Menge aller endlichen Vereinigungen der a_i , $i \in I$, und sei $m =_{\text{df}} \sup_{a \in A} \mu(a)$

(existiert, da stets $\mu(a) \leq 1$; denn μ ist normiert).

Es gibt schon abzählbar-viele $a_k \in A$, $k=1,2,\dots$, mit

$a_k \subseteq a_{k+1}$ und $m = \sup_{k=1,2,\dots} \mu(a_k)$. Sei nun

$a = \bigcup_{k=1}^{\infty} a_k$, so gilt $\mu(a) = m$ wegen der Stetigkeit

nach oben von μ . Es gilt nun $a_i \subseteq a$ für alle $i \in I$

(und damit $a = \bigcup_{i \in I} a_i$, da a nach Definition schon

Vereinigung abzählbar-vieler der a_i , $i \in I$ ist).

Denn $\mu(a_i \cup a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(a_i \cup a_k) \leq m$, da

$a_i \cup a = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_i \cup a_k)$ und nach Definition gilt:

$\mu(a_i \cup a_k) \leq m$. Da nun $a \subseteq a_i \cup a$ und $\mu(a) = m$ folgt:

$\mu((a_i \cup a) - a) = \mu(a_i \cup a) - \mu(a) = 0$, also $a = a \cup a_i$,

also $a_i \subseteq a$.

b) Dies folgt einfach durch Dualisierung.

c) Beliebige Untermengen von M besitzen

Vereinigungen und Durchschnitte. M ist also vollständig.

d) Trivial nach a), b): Jeder σ -Ring ist gegen beliebige nichtleere Vereinigungs- und Durchschnittsbildungen abgeschlossen.

Anmerkung 1: Satz 6ab läßt sich in gewisser Weise auf beliebige quasi-effektive Boole'sche Algebren verallgemeinern: Sei M vollständige Boole'sche Algebra und sei μ_i , $i \in I$, effektives System von σ -Maßen der transfiniten Dimension $\mathcal{V}$ (soll heißen: I hat die Mächtigkeit $\mathcal{V}$). Sei nun $a_k \in M$ für $k \in K$, $K \neq \emptyset$. Dann gibt es $K' \subseteq K$ mit einer Mächtigkeit kleiner als $\mathcal{V}$ mit $\bigcup_{k \in K} a_k = \bigcup_{k \in K'} a_k$. Entsprechend gilt das Duale für den Durchschnitt.

Sei nämlich A wieder die Menge der endlichen Vereinigungen der a_k , $k \in K$, und sei $m_i = \sup_{a \in A} \mu_i(a)$ für $i \in I$. Für jedes $i \in I$ gibt es nun $a_{i,1} \in A$, $l=1,2,\dots$, mit $a_{i,1} \subseteq a_{i,1+1}$, $m_i = \sup_{l=1,2,\dots} \mu_i(a_{i,1})$. Sei nun $b_i = \bigcup_{l=1}^{\infty} a_{i,1}$, so gilt $\mu_i(b_i) = m_i$ wegen der Stetigkeit nach oben von μ_i . Sei nun $a = \bigcup_{i \in I} b_i = \bigcup_{i \in I, l=1,2,\dots} a_{i,1}$. Für jedes (i,l) gibt es nun endlich-viele a_k , $k \in K$, deren Vereinigung $a_{i,1}$ ist (denn $a_{i,1} \in A$!). Man sieht so, daß es ein $K' \subseteq K$ mit einer Mächtigkeit kleiner als $\mathfrak{N}$ gibt ($\mathfrak{N}$ transfinit!), so daß $a = \bigcup_{i \in I, l=1,2,\dots} a_{i,1} = \bigcup_{k \in K'} a_k$. Zu zeigen bleibt nun nur $a_k \subseteq a$ für alle $k \in K$ (dann gilt nämlich: $\bigcup_{k \in K} a_k = \bigcup_{k \in K'} a_k$). Es gilt: $\mu_i(a_k - a) \leq \mu_i(a_k - b_i) \leq \mu_i((a_k \cup b_i) - b_i) = \mu_i(a_k \cup b_i) - \mu_i(b_i) = \mu_i(a_k \cup b_i) - m_i \geq 0$. Nun ist aber $\mu_i(a_k \cup b_i) = \lim_{l \rightarrow \infty} \mu_i(a_k \cup a_{i,1}) \leq m_i$, da $a_k \cup a_{i,1} \in A$. Also gilt $\mu_i(a_k - a) = 0$ für alle $i \in I$, also auch $a_k - a = 0$, $a_k \subseteq a$, da μ_i , $i \in I$, effektiv ist.

Vorbemerkung 2: Sei nun B beliebige Boole'sche σ -Algebra, R Ring in B . Weiter sei M beliebige effektive Boole'sche Algebra (und μ effektives, normiertes σ -Maß auf M). Vereinigungs- und Durchschnittsbildung beziehen sich im Folgenden immer auf B (oder M) und sind nicht etwa relativ zu einem Unterring zu verstehen.

Definition 2: p ist Verbandsmaß auf R (mit Werten in M) $\equiv_{df}$ p ist Abbildung von R in M mit: Aus $a, a_i \in R$ mit $a = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$ folgt $p(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i)$ (σ -Additivität) .

Satz 7: p ist genau dann Verbandsmaß, wenn p σ -Homomorphismus von R in M ist.

Dabei soll p σ -Homomorphismus von R in M genannt werden, wenn

$$a) \quad p(a \cup b) = p(a) \cup p(b)$$

$$\text{und } b) \quad p(a \cap b) = p(a) \cap p(b)$$

$$\text{und } c) \quad p(a - b) = p(a) - p(b)$$

$$\text{und } d) \quad \text{Aus } a \leq b \text{ folgt } p(a) \leq p(b) \text{ für } a, b \in R .$$

$$\text{und } e) \quad \text{Aus } a, a_i \in R, a = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i \text{ folgt:}$$

$$p(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i) .$$

$$\text{und } f) \quad \text{Aus } a, a_i \in R, a = \bigcap_{i=1}^{\infty} a_i \text{ folgt:}$$

$$p(a) = \bigcap_{i=1}^{\infty} p(a_i) .$$

Beweis 7:I. Sei p Verbandsmaß:

$$a) \quad \text{Es gilt } p(o) = o : \text{ Sei nämlich } a =_{df} o, a_i =_{df} o \text{ für } i=1,2,\dots . \text{ Dann gilt } a = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i \text{ mit } a, a_i \in R, \text{ also auch } p(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i), \text{ also } p(o) = p(o) \cap p(o) = p(a_1) \cap p(a_2) = o .$$

$$b) \quad \text{Aus } a, a_i \in R \text{ für } i=1,2,\dots,n \text{ mit } a = \bigcup_{i=1}^n a_i \text{ folgt: } p(a) = \bigcup_{i=1}^n p(a_i) . \text{ Denn sei } a_i = o \text{ für } i=n+1, n+2, \dots, \text{ dann gilt: } a = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i \text{ mit } a, a_i \in R \text{ für } i=1,2,\dots, \text{ also auch } p(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i) = \bigcup_{i=1}^n p(a_i), \text{ da } p(a_i) = o \text{ für } i=n+1, n+2, \dots .$$

- c) Es gilt $p(a \cup b) = p(a) \cup p(b)$ für $a, b \in R$. Denn:
 $a \cup b = (a-b) \cup (a \cap b) \cup (b-a)$, $a = (a-b) \cup (a \cap b)$,
 $b = (b-a) \cup (a \cap b)$ mit $a-b, a \cap b, b-a \in R$. Also gilt:
 $p(a \cup b) = p(a-b) \cup p(a \cap b) \cup p(b-a)$, $p(a) =$
 $p(a-b) \cup p(a \cap b)$, $p(b) = p(b-a) \cup p(a \cap b)$, also:
 $p(a \cup b) = p(a) \cup p(b)$.
- d) Es gilt $p(a \cap b) = p(a) \cap p(b)$. Für $a \cap b = o$ gilt
nämlich auch $p(a) \cap p(b) = o$, da $a \cup b = a \cup b$,
also auch $p(a \cup b) = p(a) \cup p(b)$. Sei nun $a, b \in R$
beliebig: Da $a = (a-b) \cup (a \cap b)$, $b = (b-a) \cup (a \cap b)$
mit $(a-b) \cap (b-a) = o$, folgt: $p(a) \cap p(b) =$
 $(p(a-b) \cup p(a \cap b)) \cap (p(b-a) \cup p(a \cap b)) =$
 $(p(b-a) \cap p(a-b)) \cup (p(a-b) \cap p(a \cap b)) \cup$
 $(p(a \cap b) \cap p(b-a)) \cup (p(a \cap b) \cap p(a \cap b)) =$
 $(p(a \cap b) \cap p(a \cap b)) = p(a \cap b)$; denn die Inhalte
der anderen Klammern sind o (etwa:
 $p(a-b) \cap p(b-a) = o$, da $(a-b) \cap (b-a) = o$ ist, usw.).
- e) Es gilt $p(a-b) = p(a) - p(b)$. Denn offenbar folgt
nach c), d): $(p(a) \cap p(b)) \cap p(a-b) = p(a \cap b) \cap$
 $p(a-b) = p((a \cap b) \cap (a-b)) = p(o) = o$,
 $(p(a) \cap p(b)) \cup p(a-b) = p(a \cap b) \cup p(a-b) =$
 $p((a \cap b) \cup (a-b)) = p(a)$. $p(a-b)$ hat also die-
selben Eigenschaften wie $p(a) - p(b)$, aus der
Eindeutigkeit des Relativkomplementes folgt also:
 $p(a-b) = p(a) - p(b)$.
- f) Aus $a, b \in R$, $a \subseteq b$ folgt $p(a) \subseteq p(b)$. Denn $a \subseteq b \rightarrow$
 $a \cup b = b \rightarrow p(a) \cup p(b) = p(b) \rightarrow p(a) \subseteq p(b)$.

- g) Sei $a = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$, $a_i \in R$, dann gilt: $p(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i)$. Denn sei $b_i =_{\text{df}} a_i - a_{i-1}$ ($a_0 =_{\text{df}} 0$), so folgt: $a_n = \bigcup_{i=1}^n b_i$, $a = \bigcup_{i=1}^{\infty} b_i$, also auch: $p(a_n) = \bigcup_{i=1}^n p(b_i)$, $p(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(b_i)$, also $p(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(b_i) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{i=1}^n p(b_i)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} p(a_n)$.
- h) Sei $a, a_i \in R$, $a = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$. Dann gilt $p(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i)$. Denn sei $b_n =_{\text{df}} \bigcup_{i=1}^n a_i$, so ist $a = \bigcup_{n=1}^{\infty} b_n$, also auch $p(a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} p(b_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{i=1}^n p(a_i)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} p(a_n)$.
- i) Sei $a, a_i \in R$ und $a = \bigcap_{i=1}^{\infty} a_i$. Dann gilt $p(a) = \bigcap_{i=1}^{\infty} p(a_i)$. Denn definieren wir $b =_{\text{df}} a_1$, $b_i =_{\text{df}} b \cap a_i$, so gilt: $a = \bigcap_{i=1}^{\infty} b_i$, $a, b_i \subseteq b$, $a, b, b_i \in R$. Da $b-a = \bigcup_{i=1}^{\infty} (b-b_i)$, folgt nach h): $p(b-a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(b-b_i)$, $p(b)-p(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (p(b)-p(b_i))$. Also gilt: $p(a) = p(b) - (p(b)-p(a)) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (p(b) - (p(b)-p(b_i))) = \bigcap_{i=1}^{\infty} p(b_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} p(a_i) \cap p(a_1) = \bigcap_{i=1}^{\infty} p(a_i)$.
 p ist also σ -Homomorphismus.

II. Sei nun p σ -Homomorphismus: Aus $a, a_i \in R$ mit $a = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$ folgt: $p(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i)$. Da für $i_1 \neq i_2$ gilt: $a_{i_1} \cap a_{i_2} = 0$, folgt: $p(a_{i_1}) \cap p(a_{i_2}) = p(a_{i_1} \cap a_{i_2}) = p(0) = p(0) - p(0) = p(0-0) = 0$. Also ist sogar $p(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i)$.

p ist also Verbandsmaß.

Satz 8: Sei p Verbandsmaß auf R :

a)†. Aus $a \subseteq \bigcup_{i=1}^n a_i$, $a, a_i \in R$, folgt:

$$p(a) \subseteq \bigcup_{i=1}^n p(a_i) \quad (p \text{ ist endlich-superadditiv})$$

2. Aus $a \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$, $a, a_i \in R$ folgt $p(a) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i)$.

(p ist abzählbar-superadditiv)

b)1. Aus $\bigcup_{i=1}^n a_i \subseteq a$, $a, a_i \in R$ folgt: $\bigcup_{i=1}^n p(a_i) \subseteq p(a)$.

(p ist endlich-subadditiv)

2. Aus $\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i \subseteq a$, $a, a_i \in R$ folgt: $\bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i) \subseteq p(a)$.

(p ist abzählbar-subadditiv)

Beweis 8: a)1. Aus $a \subseteq \bigcup_{i=1}^n a_i \rightarrow \bigcup_{i=1}^n (a \cup a_i) =$

$a \cup \bigcup_{i=1}^n a_i = \bigcup_{i=1}^n a_i$, also :

$\bigcup_{i=1}^n (p(a) \cup p(a_i)) = \bigcup_{i=1}^n p(a_i)$, also :

$p(a) \subseteq \bigcup_{i=1}^n p(a_i)$.

Genauso folgen a)2., b)1.2., da p σ -Homomorphismus ist.

Definition 3: p ist 1-Verbandsmaß $\equiv_{\text{df}} 1 \in R$ und

$p(1) = 1$.

Satz 9: p ist 1-Verbandsmaß $\equiv R$ ist totaler Ring

(Aus $a \in R$ folgt $a' \in R$) und $p(a') = p(a)'$.

Anmerkung: Für die bisherigen Sätze über das Verbands-

maß wurde nur benutzt, daß M Boole'sche σ -Algebra,

nicht aber, daß M effektiv ist. Die Sätze gelten ins-

besondere also auch für quasi-effektive Verbandsmaße.

C. Fortsetzung des Verbandsmaßes

Vorbemerkung 1: Sei M effektive Boole'sche Algebra, μ effektives, normiertes σ -Maß auf M .

Sei weiter B beliebige Boole'sche σ -Algebra, R Ring in B , $S = S(R)$ der von R erzeugte σ -Ring und $H = H(R)$ der von R erzeugte hereditäre σ -Ring ($H = \{a \in B / a \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i \text{ mit } a_i \in R\}$).

Sei weiter U die Menge der R -Überdeckungen (a heißt R -Überdeckung, falls $a \in B$ und $a = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$ mit $a_i \in R$). Offensichtlich ist U gegen abzählbare Vereinigungen abgeschlossen, aber auch gegen endliche Durchschnitte (wegen der allgemeinen Distributivität in einer Boole'schen Algebra: $x \cap \bigcup_{i \in I} y_i = \bigcup_{i \in I} (x \cap y_i)$, $x \cup \bigcap_{i \in I} y_i = \bigcap_{i \in I} (x \cup y_i)$, falls die Vereinigungen und Durchschnitte existieren). H ist dann das hereditäre System zu U ($a \in H \equiv (a \in B, \text{ und es gibt ein } b \in U \text{ mit } a \subseteq b)$).

Sei nun p Verbandsmaß auf R (mit Werten in M).

Satz 1: a) Aus $a_i, b_j \in R$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} b_j$ folgt:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} p(b_j).$$

(abzählbare Subsuperadditivität)

b) Es gibt genau eine abzählbar- U -homomorphe Fortsetzung $\bar{p}$ von p auf U .

c) $\bar{p}$ ist monoton und $\cap$ -homomorph.

Beweis 1: a) Es gilt : $a_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_i \cap b_j)$,
 $\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i \cap b_j) \subseteq b_j$, also : $p(a_i) = \bigcup_{j=1}^{\infty} p(a_i \cap b_j)$,
 $\bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i \cap b_j) \subseteq p(b_j)$, also : $\bigcup_i p(a_i) =$
 $\bigcup_{i,j} p(a_i \cap b_j) \subseteq \bigcup_j p(b_j)$.

b) $\bar{p}$ wird nach a) eindeutig durch $\bar{p}(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i)$ für $a \in U$, $a_i \in R$, $a = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$, festgelegt.
 Offensichtlich ist $\bar{p}$ eine $\cup$ - σ -homomorphe Fortsetzung von p .

c) 1. Nach a) ist $\bar{p}$ auch monoton.

2. Sei $a = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$, $b = \bigcup_{j=1}^{\infty} b_j$, $a, b \in U$,
 $a_i, b_j \in R$. Dann gilt auch : $\bar{p}(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i)$,
 $\bar{p}(b) = \bigcup_{j=1}^{\infty} p(b_j)$ und $\bar{p}(a) \cap \bar{p}(b) = \bigcup_{i,j} p(a_i \cap b_j)$,
 $a \cap b = \bigcup_{i,j} (a_i \cap b_j)$, also endlich :
 $\bar{p}(a \cap b) = \bar{p}(a) \cap \bar{p}(b)$.

Definition 1: Für $a \in H$ sei :

$$p^+(a) = \bigcap_{b \in U, a \subseteq b} \bar{p}(b) \quad (M \text{ ist vollständig !}) .$$

Satz 2: a) Für $a \in U$ gilt $p^+(a) = \bar{p}(a)$.

b) Für $a \in R$ gilt $p^+(a) = p(a)$.

c) Für $a, b \in H$, $a \subseteq b$ gilt : $p^+(a) \subseteq p^+(b)$
 (Monotonie) .

d) Für $a, a_i \in H$, $a \subseteq \bigcup_{i=1}^n a_i$ gilt :

$$p^+(a) \subseteq \bigcup_{i=1}^n p^+(a_i) \quad (\text{endliche Superadditivität})$$

Beweis 2: a) Sei $a \in U$. Dann gilt sicher :

$p^+(a) \subseteq \bar{p}(a)$. Sei nun $b \in U$, $a \subseteq b$. Aus der Monotonie von $\bar{p}$ folgt $\bar{p}(a) \subseteq \bar{p}(b)$, also auch $\bar{p}(a) \subseteq p^+(a)$.

b) Für $a \in R$ gilt $\bar{p}(a) = p(a)$.

c) Trivial nach Definition .

d)1. Sei $a_1, a_2, a \in H, a \leq a_1 \cup a_2$. Dann gilt:

$p^+(a_1) \cup p^+(a_2) =$ (nach dem allgemeinen Distributivgesetz:)

$$\bigcap_{b_1, b_2 \in U, a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2} (\bar{p}(b_1) \cup \bar{p}(b_2)) =$$

$$\bigcap_{b_1, b_2 \in U, a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2} \bar{p}(b_1 \cup b_2) \supseteq p^+(a), \text{ da}$$

$$b_1 \cup b_2 \in U, a \leq b_1 \cup b_2 \text{ f\"ur } b_1, b_2 \in U, a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2.$$

2. Durch Induktion folgt nun d).

Satz 3: Für $a, a_i \in H, a \leq \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$ gilt:

$p^+(a) \leq \bigcup_{i=1}^{\infty} p^+(a_i)$. (abzählbare Superadditivität. Insgesamt also: p^+ ist "äußeres Verbandsmaß").

Beweis 3: (Hier wird wesentlich benutzt, daß M effektiv ist!).

1. Sei $a \in H(R)$. Dann gibt es eine fallende Folge $b_n \in U$ mit $a \leq b_n$ und $p^+(a) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{p}(b_i)$. Denn da $p^+(a) =$

$\bigcap_{b \in U, a \leq b} \bar{p}(b)$ und der Durchschnitt in M "abzählbar"

ist, gibt es schon abzählbar-viele $\bar{b}_i \in U, a \leq \bar{b}_i$ mit

$$p^+(a) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{p}(\bar{b}_i). \text{ Man setze nun: } b_n =_{\text{df}} \bigcap_{i=1}^n \bar{b}_i.$$

Dann ist immer noch: $b_n \in U, a \leq b_n$ und wegen der Mono-

$$\text{tonie von } \bar{p} \text{ gilt: } p^+(a) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{p}(b_i).$$

2. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $b_{\varepsilon} \in U, a \leq b_{\varepsilon}$ mit

$$\mu(\bar{p}(b_{\varepsilon}) - p^+(a)) = \delta(\bar{p}(b_{\varepsilon}), p^+(a)) \leq \varepsilon. \text{ Dies folgt}$$

sofort aus 1. und der Stetigkeit nach unten von μ .

3. Sei nun $a, a_i \in H, a \leq \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig

und $\varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i, \eta_i > 0$. Sei $b_i \in U, a_i \leq b_i$ mit

$$\mu(\bar{p}(b_i)) - \mu(p^+(a_i)) \leq \eta_i. \text{ Da } b = \bigcup_{i=1}^{\infty} b_i \in U \text{ und}$$

$$a \leq b, \text{ gilt: } p^+(a) \leq \bar{p}(b) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{p}(b_i). \text{ Also folgt:}$$

$$p^+(a) - \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} p^+(a_i) \right) \leq \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{p}(b_i) \right) - \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} p^+(a_j) \right) =$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (\bar{p}(b_i) - p^+(a_i)) \leq \bigcup_{i=1}^{\infty} (\bar{p}(b_i) - p^+(a_i)).$$

Also gilt : $\mu(p^+(a) - (\bigcup_{i=1}^{\infty} p^+(a_i))) \leq$
 $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} (\bar{p}(b_i) - p^+(a_i))) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i = \varepsilon$.

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ richtig ist, folgt :

$\mu(p^+(a) - (\bigcup_{i=1}^{\infty} p^+(a_i))) = 0$, also, da μ effektiv ist :
 $p^+(a) - (\bigcup_{i=1}^{\infty} p^+(a_i)) = 0$, $p^+(a) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} p^+(a_i)$.

Anmerkung 1: Im gesamten Fortsetzungsbeweis wird nur zum Beweis von Satz 3 benutzt, daß M effektiv ist.

Satz 3 kann nun aber auch für quasi-effektive Verbandsmaße bewiesen werden : also ist der Fortsetzungssatz auch für diese richtig.

Sei nämlich μ_i , $i \in I$ effektives System von vollkommenen Maßen auf M . Aus $p^+(a) =$

$\bigcap_{b \in U, a \subseteq b} \bar{p}(b)$ (für diese Definition wird die Vollständigkeit von M benötigt) folgt :

$\bigcap_{b \in U, a \subseteq b} (\bar{p}(b) - p^+(a)) = 0$. Also gilt für jedes i , da μ_i vollkommen ist : Es gibt schon einen endlichen Durchschnitt von M -Elementen der Form $\bar{p}(b) - p^+(a)$ mit $b \in U$, $a \subseteq b$, der, da U gegen endliche Durchschnitte abgeschlossen und $\bar{p}$ endlich- $\cap$ -homomorph ist, sogar als $\bar{p}(b) - p^+(a)$ mit $b \in U$, $a \subseteq b$ dargestellt werden kann, mit $\mu_i(\bar{p}(b) - p^+(a)) \leq \varepsilon$ für ein vorgeschriebenes $\varepsilon > 0$.

Genauso wie in Beweis 3 kann nun gezeigt werden: Für $a, a_k \in H$, $a \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} a_k$ gilt :

$\mu_i(p^+(a) - (\bigcup_{k=1}^{\infty} p^+(a_k))) = 0$ für jedes $i \in I$, also gilt auch $p^+(a) - (\bigcup_{k=1}^{\infty} p^+(a_k)) = 0$ und $p^+(a) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} p^+(a_k)$, da μ_i , $i \in I$ effektiv auf M ist.

Definition 2: Sei $\mathfrak{S} = \{b \in H / \text{Für alle } a \in H \text{ gilt:}$
 $p^+(a) = p^+(a \cap b) \cup p^+(a-b) = p^+(a \cap b) \cup p^+(a \cap b') \}$.

Satz 4: $\mathfrak{S}$ ist Ring mit $R \subseteq \mathfrak{S}$.

Beweis 4.1. Sei $g, h \in \mathfrak{S}$. Für $a \in H$ gilt dann nach Definition von $\mathfrak{S}$: $p^+(a) = p^+(a \cap g) \cup p^+(a \cap g')$,
 $p^+(a \cap g) = p^+(a \cap g \cap h) \cup p^+(a \cap g \cap h')$,
 $p^+(a \cap g') = p^+(a \cap g' \cap h) \cup p^+(a \cap g' \cap h')$, also insgesamt:
 $p^+(a) = p^+(a \cap g \cap h) \cup p^+(a \cap g \cap h') \cup p^+(a \cap g' \cap h)$
 $\cup p^+(a \cap g' \cap h')$ (Zerlegung von $a \in H$ nach $g, h \in \mathfrak{S}$) .

2. Zerlegung von $a \cap (g \cup h) \in H$ nach $g, h \in \mathfrak{S}$
gibt: $p^+(a \cap (g \cup h)) = p^+(a \cap g \cap h) \cup p^+(a \cap g \cap h')$
 $\cup p^+(a \cap g' \cap h)$, da $p^+(a \cap (g \cup h) \cap g' \cap h') = p^+(a \cap (g \cup h)$
 $\cap (g \cup h)') = p^+(o) = o$. Zusammen mit der Zerlegung
von a nach g, h folgt:

$p^+(a) = p^+(a \cap (g \cup h)) \cup p^+(a \cap g' \cap h')$, also:
 $p^+(a) = p^+(a \cap (g \cup h)) \cup p^+(a \cap (g \cup h)')$. Also gilt:
Aus $g, h \in \mathfrak{S}$ folgt $g \cup h \in \mathfrak{S}$.

3. Zerlegung von $a \cap (g-h)' = a \cap (g' \cup h)$ nach
 $g, h \in \mathfrak{S}$ gibt: $p^+(a \cap (g-h)') = p^+(a \cap g \cap h) \cup p^+(a \cap g' \cap h)$
 $\cup p^+(a \cap g' \cap h')$, da $p^+(a \cap (g' \cup h) \cap g \cap h') =$
 $p^+(a \cap (g' \cup h) \cap (g' \cup h)') = p^+(o) = o$. Zusammen mit
der Zerlegung von a nach g, h folgt also: $p^+(a) =$
 $p^+(a \cap (g-h)') \cup p^+(a \cap g \cap h') = p^+(a \cap (g-h)) \cup$
 $p^+(a \cap (g-h)')$. Für $g, h \in \mathfrak{S}$ ist also auch $g-h \in \mathfrak{S}$.

4. Für $a, b \in H$ gilt $p^+(a) \subseteq p^+(a \cap b) \cup p^+(a-b)$,
da $a \subseteq (a-b) \cup (a \cap b)$ und p^+ superadditiv ist.

5. Sei $a \in H$ und $g \in R$. Sei $b \in U$, $a \leq b$. Da $g \in R$, gilt auch: $b \cap g, b - g \in U$. Da $a \cap g \leq b \cap g$, $a - g \leq b - g$, folgt:

$p^+(a \cap g) \leq \bar{p}(b \cap g) = \bar{p}(b) \cap \bar{p}(g) = \bar{p}(b) \cap p(g)$ und $p^+(a - g) \leq \bar{p}(b - g) = \bar{p}(b) - \bar{p}(g) = \bar{p}(b) - p(g)$, wie man leicht sieht. Also: $p^+(a \cap g) \cup p^+(a - g) \leq \bar{p}(b)$ für alle $b \in U$, $a \leq b$, also dann auch $p^+(a \cap g) \cup p^+(a - g) \leq p^+(a)$. Wegen 4. also: $p^+(a \cap g) \cup p^+(a - g) = p^+(a)$, also $g \in S$.

Damit ist aber auch $R \subseteq S$.

S ist also Ring mit $R \subseteq S$.

Satz 5: S ist σ -Ring und die Spur von p^+ auf S ist Verbandsmaß.

Beweis 5: 1. p^+ ist schnitt-additiv bezüglich S :

Für $b = g \cup h$, $b, g, h \in S$, $a \in H$ gilt $p^+(a \cap b) = p^+(a \cap g) \cup p^+(a \cap h)$. Betrachten wir nämlich die Zerlegung von $a \cap (g \cup h)$ nach $g, h \in S$, so folgt wegen $a \cap (g \cup h) \cap g \cap h = 0$ (da $g \cap h = 0$!),
 $a \cap (g \cup h) \cap g \cap h' = a \cap g \cap h' = a \cap g$ ($g \cap h' = g$, da $g \cap h = 0$), $a \cap (g \cup h) \cap g' \cap h = a \cap g' \cap h = a \cap h$ ($h \cap g' = h$, da $h \cap g = 0$) und schliesslich wegen $a \cap (g \cup h) \cap g' \cap h' = a \cap (g \cup h) \cap (g \cup h)' = 0$:
 $p^+(a \cap (g \cup h)) = p^+(a \cap g) \cup p^+(a \cap h)$.

2. Durch Induktion folgt für $g = \bigcup_{i=1}^n g_i$, $g, g_i \in S$, $a \in H$: $p^+(a \cap g) = \bigcup_{i=1}^n p^+(a \cap g_i)$ (endliche Schnittadditivität).

3. Sei nun $g = \bigcup_{i=1}^{\infty} g_i$ mit $g_i \in S$. Sei $a \in H$. Wir definieren: $h_n = \bigcup_{i=1}^n g_i$. Da $h_n \in S$, gilt:

$$p^+(a) = p^+(a \cap h_n) \cup p^+(a - h_n) \supseteq p^+(a \cap h_n) \cup p^+(a - g) ,$$

$$p^+(a \cap h_n) = \bigcup_{i=1}^n p^+(a \cap g_i) , \text{ also auch :}$$

$$p^+(a) \supseteq (\bigcup_{i=1}^n p^+(a \cap g_i)) \cup p^+(a - g) \text{ für alle } n , \text{ also auch :}$$

$$p^+(a) \supseteq (\bigcup_{i=1}^{\infty} p^+(a \cap g_i)) \cup p^+(a - g) \supseteq p^+(a \cap g) \cup p^+(a - g) ,$$

da p^+ abzählbar-superadditiv ist, also insbesondere aus

$$a \cap g \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a \cap g_i) \text{ folgt : } p^+(a \cap g) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} p^+(a \cap g_i) .$$

Insgesamt also :

$$p^+(a) \supseteq (\bigcup_{i=1}^{\infty} p^+(a \cap g_i)) \cup p^+(a - g) \supseteq p^+(a \cap g) \cup p^+(a - g)$$

$$\supseteq p^+(a) , \text{ und daher :}$$

$$p^+(a) = (\bigcup_{i=1}^{\infty} p^+(a \cap g_i)) \cup p^+(a - g) = p^+(a \cap g) \cup p^+(a - g) \\ = p^+(a) .$$

Wegen $p^+((a)) = p^+(a \cap g) \cup p^+(a - g)$ ist $g \in \mathfrak{S}$. $\mathfrak{S}$ ist also gegen abzählbare, disjunkte Vereinigungen abgeschlossen, und da $\mathfrak{S}$ Ring ist, ist $\mathfrak{S}$ sogar σ -Ring.

Aus $(\bigcup_{i=1}^{\infty} p^+(a \cap g_i)) \cup p^+(a - g) = p^+(a \cap g) \cup p^+(a - g)$ folgt : $\bigcup_{i=1}^{\infty} p^+(a \cap g_i) = p^+(a \cap g)$ (abzählbare Schnittadditivität von p^+ bezüglich $\mathfrak{S}$) .

4. Aus der abzählbaren Schnittadditivität folgt für $a=g$: $\bigcup_{i=1}^{\infty} p^+(g_i) = p^+(g)$. Die Spur von p^+ auf $\mathfrak{S}$ ist also Verbandsmaß.

Satz 6: Ein effektives Verbandsmaß p auf R läßt sich eindeutig zu einem Verbandsmaß auf S fortsetzen.

Beweis 6: I. Die Spur von p^+ auf S ist offenbar Verbandsmaß, da $S \subseteq \mathfrak{S}$. Denn $\mathfrak{S}$ ist ein σ -Ring mit $R \subseteq \mathfrak{S}$, also auch mit $S = S(R) \subseteq \mathfrak{S}$. (Existenz) .

II. Seien nun p_1, p_2 Verbandsmaße auf S , die p fortsetzen. Sei nun $G = \{a \in S / p_1(a) = p_2(a)\}$.

Offenbar ist $G \subseteq S$. Da p_1, p_2 nun p definiert auf R fortsetzen, gilt $R \subseteq G$. Da p_1, p_2 σ -Homomorphismen sind, ist G offenbar σ -Ring. Also gilt : $S(R) = S \subseteq G$, also $S=G$. Also gilt : $p_1=p_2$. (Unität).

D. Produktbildung und Produktzerlegung

Sei S ein σ -Körper auf einer Menge X (d.h. eine Boole'sche σ -Unteralgebra von $P(X)$) .
 S heißt topologische Boole'sche Algebra, falls es auf X eine lokal-kompakte Hausdorff-Topologie T gibt, derart daß S der σ -Ring der Baire-Mengen dieser Topologie ist (siehe Halmos, Measure Theory). Da $X \in S$ ist, ist X zumindest σ -kompakt. S heißt kompakte Boole'sche Algebra, falls (X, T) sogar kompakt ist. So ist z.B. die Menge aller komplexen oder reellen Borelmengen eine topologische Boole'sche Algebra, und die Menge der Borelmengen des Einheitsintervalls sogar eine kompakte Boole'sche Algebra.

Ein Verbandsmaß auf einer topologischen Boole'schen Algebra heißt topologisches Verbandsmaß, auf einer kompakten Algebra entsprechend kompaktes Verbandsmaß.

Bekanntlich ist jedes σ -Maß μ auf dem σ -Ring S der Bairemengen regulär, d.h. für $E \in S$ gilt, falls U die Menge der offenen und C die Menge der kompakten Mengen der zugehörigen lokal-kompakten Hausdorff-Topologie bezeichnet: $\mu(E) = \inf_{U \in \mathcal{U} \cap S, E \subseteq U} \mu(U) = \sup_{C \in \mathcal{C} \cap S, C \subseteq E} \mu(C)$.
 Oder anders formuliert: Zu jedem $E \in S$, $\varepsilon > 0$ gibt es

$u \in U \cap S$, $c \in C \cap S$ mit $c \in E \subseteq u$ und $\mu(u-c) \leq \varepsilon$.

Seien nun X, Y Mengen, A_x, A_y Körper auf X, Y (d.h. Unteralgebren von $P(X), P(Y)$). $1_x, 1_y$ sind dann nur andere Bezeichnungen für X, Y und $0_x, 0_y$ bedeuten einfach $\emptyset$). Für $a_x \subseteq X$ sei $\bar{a}_x = a_x \times 1_y$ (cartesisches Produkt) und für $a_y \subseteq Y$ sei $\bar{a}_y = 1_x \times a_y$. Entsprechend seien B_x, B_y die Mengen aller $\bar{a}_x$ mit $a_x \in A_x$ bzw. aller $\bar{a}_y$ mit $a_y \in A_y$. B_x, B_y sind Körper auf $X \times Y$ und zu A_x, A_y (kanonisch) isomorph. Sei B die von B_x, B_y (in $P(X \times Y)$) erzeugte Boole'sche Algebra. B ist dann das abstrakte Produkt der Boole'schen Algebren A_x, A_y , da :

1. A_x, A_y sind zu Unteralgebren B_x, B_y von B isomorph.
2. B_x, B_y erzeugen B (als Boole'sche Algebra).
3. B_x, B_y sind unabhängig, d.h. für $b_x \in B_x$, $b_y \in B_y$ folgt aus $b_x \cap b_y = 0$: $b_x = 0$ oder $b_y = 0$.

Bekanntlich gilt dann (siehe Sikorski, Boolean Algebras) : Ist M beliebige Boole'sche Algebra und sind p_x, p_y Homomorphismen von A_x, A_y in M (und sind $\bar{p}_x, \bar{p}_y$ die kanonisch-entsprechenden Homomorphismen von B_x, B_y in M), so gibt es genau einen Homomorphismus $\bar{p}$ von B in M , der $\bar{p}_x, \bar{p}_y$ fortsetzt.

Seien nun A_x, A_y sogar σ -Körper und sei B_σ der von B erzeugte σ -Körper. Dann ist B_σ abstraktes σ -Produkt der Boole'schen σ -Algebren A_x, A_y , da :

1. A_x, A_y sind zu den σ -Unteralgebren B_x, B_y von B_σ isomorph.
2. B_x, B_y σ -erzeugen B_σ .

3. B_x, B_y sind σ -unabhängig (was hier gleichwertig mit "unabhängig" ist) .

Da B_σ σ -Körper ist, ist B_σ sogar das kleinste σ -Produkt von A_x, A_y , d.h.: Ist (C_σ, C_x, C_y) ein anderes σ -Produkt und sind $g_x/C_x \rightarrow B_x$, $g_y/C_y \rightarrow B_y$ die kanonischen Isomorphismen zwischen C_x, B_x und C_y, B_y , so gibt es genau einen σ -Homomorphismus g von C_σ auf B_σ , der g_x, g_y fortsetzt (siehe Sikorski, Boolean Algebras) .

Seien nun p_x, p_y effektive Verbandsmaße auf A_x, A_y (mit Werten in M) . Dann gibt es genau einen Homomorphismus $\bar{p}$ auf B , der $\bar{p}_x, \bar{p}_y$ fortsetzt (da B abstraktes Produkt von A_x, A_y und p_x, p_y Homomorphismen) . Wir werden beweisen, daß, falls A_x, A_y topologische Algebren sind, $\bar{p}$ sogar σ -Homomorphismus, also effektives Verbandsmaß auf B , ist. Mit Hilfe des Fortsetzungstheorems kann $\bar{p}$ dann zu einem Verbandsmaß p auf B_σ fortgesetzt werden, das dann Produkt der topologischen Verbandsmaße p_x, p_y heißt. Da B_σ bekanntlich der σ -Körper der Baire-Mengen der Produkttopologie ist, ist das Produkt topologischer Verbandsmaße wieder ein topologisches Verbandsmaß.

Seien also A_x, A_y topologische Boole'sche Algebren und p_x, p_y effektive Verbandsmaße auf A_x, A_y , μ effektives Maß auf M .

Definition 1: Seien $\bar{\mu}, \mu_x, \mu_y$ Maße auf B, A_x, A_y . $\bar{\mu}$ heißt beschränkt durch μ_x, μ_y , falls für $a_x \in A_x$ und $a_y \in A_y$ gilt : $\bar{\mu}(a_x \times a_y) \leq \min(\mu_x(a_x), \mu_y(a_y))$.

Oder anders formuliert : falls gilt :

$$\bar{\mu}(\bar{a}_x) \leq \mu_x(a_x) \text{ für } a_x \in A_x, \quad \bar{\mu}(\bar{a}_y) \leq \mu_y(a_y) \text{ für } a_y \in A_y.$$

Lemma 1: Sei das Maß $\bar{\mu}$ beschränkt durch die σ -Maße μ_x, μ_y . Dann ist $\bar{\mu}$ regulär (im folgenden Sinne) : Für jedes $e \in B$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein (in der Produkttopologie) offenes u und ein kompaktes c mit $c, u \in B$, $c \subseteq e \subseteq u$ und $\bar{\mu}(u-c) \leq \varepsilon$.

Beweis 1: Bekanntlich bildet die Menge aller $a_x \times a_y$ mit $a_x \in A_x, a_y \in A_y$ einen Halbring H , der B erzeugt. Jedes Element von B ist also als endliche Vereinigung von H -Elementen darstellbar, so daß dieser Satz offenbar nur für $e \in H$ bewiesen werden braucht, da $\bar{\mu}$ als Maß endlich-superadditiv ist.

Sei also $e \in H$, etwa $e = e_x \times e_y$ mit $e_x \in A_x, e_y \in A_y$. Da μ_x, μ_y als σ -Maße regulär sind, gibt es kompakte $c_x \in A_x, c_y \in A_y$ und offene $u_x \in A_x, u_y \in A_y$ (dabei sind "kompakt" und "offen" bezüglich der entsprechenden Topologien auf X, Y zu verstehen) mit $c_x \subseteq e_x \subseteq u_x$, $c_y \subseteq e_y \subseteq u_y$ und $\mu_x(u_x - c_x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\mu_y(u_y - c_y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Da $c = c_x \times c_y$ kompakt und $u = u_x \times u_y$ offen ist (in der Produkttopologie) und offenbar $c \subseteq e \subseteq u$, $c, u \in B$ gilt, bleibt nur noch $\bar{\mu}(u-c) \leq \varepsilon$ zu zeigen. Nun gilt aber offenbar:

$$u-c \subseteq (\overline{u_x - c_x}) \cup (\overline{u_y - c_y}), \text{ also, da } \bar{\mu}(\overline{u_x - c_x}) \leq \mu_x(u_x - c_x), \\ \bar{\mu}(\overline{u_y - c_y}) \leq \mu_y(u_y - c_y), \text{ auch : } \bar{\mu}(u-c) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Lemma 2: Sind μ_x, μ_y σ -Maße, und ist das Maß $\bar{\mu}$ beschränkt durch μ_x, μ_y , so ist auch $\bar{\mu}$ σ -Maß.

Beweis 2: Wir brauchen nur die abzählbare

Superadditivität von $\bar{\mu}$ zu beweisen, d.h.: Aus

$b, b_i \in B$ mit $b \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} b_i$ folgt: $\bar{\mu}(b) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(b_i)$,

falls $\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(b_i)$ existiert. Denn als Maß ist $\bar{\mu}$

schon endlich-subadditiv: Aus $\bigcup_{i=1}^n b_i \subseteq b$, $b, b_i \in B$

folgt $\sum_{i=1}^n \bar{\mu}(b_i) \leq \bar{\mu}(b)$. Also ist $\bar{\mu}$ auch abzählbar-

subadditiv: Aus $\bigcup_{i=1}^{\infty} b_i \subseteq b$, $b, b_i \in B$ folgt:

$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(b_i) \leq \bar{\mu}(b)$. Zusammen mit der abzählbaren

Superadditivität ergibt sich dann also die σ -Additivi-

rität, $\bar{\mu}$ ist also σ -Maß.

Sei daher $b, b_i \in B$, $b \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} b_i$,

$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(b_i)$ konvergent. Da $\bar{\mu}$ nach Lemma 1 regulär ist,

gibt es offene $u_i \in B$, $b_i \subseteq u_i$ mit $\bar{\mu}(u_i - b_i) \leq \eta_i$

(wobei $\varepsilon > 0$ vorgeschrieben und $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i = \varepsilon$, $\eta_i > 0$

ist) und ein kompaktes $c \in B$, $c \subseteq b$ mit $\bar{\mu}(b - c) \leq \varepsilon$.

Da $b \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} b_i$ ist, gilt auch $c \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} u_i$. Da aber c

kompakt, u_i offen, gibt es schon endlich-viele

u_{i_k} , $k=1, 2, \dots, n$, mit $c \subseteq \bigcup_{k=1}^n u_{i_k}$. Da $\bar{\mu}$ aber als

Maß endlich-superadditiv ist, gilt:

$$\bar{\mu}(c) \leq \sum_{k=1}^n \bar{\mu}(u_{i_k}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(u_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(b_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(u_i - b_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(b_i) + \varepsilon. \text{ Also gilt:}$$

$$\bar{\mu}(b) \leq \bar{\mu}(c) + \bar{\mu}(b - c) \leq \bar{\mu}(c) + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(b_i) + 2\varepsilon.$$

Daher gilt: $\bar{\mu}(b) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(b_i) + 2\varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$,

also auch $\bar{\mu}(b) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(b_i)$.

Theorem 1: Zu jedem Paar topologischer,

effektiver Verbandsmaße p_x, p_y auf A_x, A_y gibt es ein

topologisches, effektives Verbandsmaß p auf B_{σ} , das

die den p_x, p_y kanonisch-entsprechenden Verbandsmaße $\bar{p}_x, \bar{p}_y$ fortsetzt (Produktbildung) .

Beweis: Definieren wir $\bar{\mu}, \mu_x, \mu_y$ auf B, A_x, A_y durch $\bar{\mu}(e) = \mu(\bar{p}(e))$ für $e \in B$,
 $\mu_x(e_x) = \mu(p_x(e_x))$ für $e_x \in A_x$, $\mu_y(e_y) = \mu(p_y(e_y))$
 für $e_y \in A_y$, wo μ ein effektives σ -Maß auf M ist,
 so sind μ_x, μ_y offenbar σ -Maße, da p_x, p_y σ -Homomorphismen sind. $\bar{\mu}$ ist zumindest Maß, da $\bar{p}$ Homomorphismus ist. Da offenbar $\bar{\mu}$ durch μ_x, μ_y beschränkt ist, ist auch $\bar{\mu}$ nach Lemma 2 σ -Maß. Deshalb kann bewiesen werden:

I. Aus $b_i \in B$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} b_i = 0$ folgt $\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{p}(b_i) = 0$.
 Denn sei $d =_{\text{def}} \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{p}(b_i)$, so gilt: $\mu(d) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(\bar{p}(b_i)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\mu}(b_i)$ wegen der Stetigkeit nach unten von μ . Da aber $\bar{\mu}$ als σ -Maß ebenfalls stetig nach unten ist, folgt aus $\bigcap_{i=1}^{\infty} b_i = 0$:
 $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\mu}(b_i) = 0$. Aus $\mu(d) = 0$ folgt aber $d = 0$, da μ effektiv ist.

II. Aus I. zusammen mit der Tatsache, daß $\bar{p}$ Homomorphismus ist, folgt auf übliche Art und Weise, daß $\bar{p}$ sogar σ -Homomorphismus, also auch Verbandsmaß, ist. Mit Hilfe des Fortsetzungstheorems ergibt sich dann das obige Produkttheorem.

Anmerkung: Das Produkttheorem läßt sich offenbar sofort auf quasi-effektive Verbandsmaße übertragen. Um zu beweisen, daß der Homomorphismus $\bar{p}$ sogar σ -Homomorphismus ist, wird einfach Lemma 2 auf jedes

σ -Maß μ_i des effektiven Systems $\mu_i, i \in I$, auf M wie im obigen Beweis angewendet.

Das Produkttheorem kann auf beliebige Produkte von kompakten Verbandsmaßen verallgemeinert werden. Sei nämlich $X_i, i \in I$, eine Familie von Mengen und A_i kompakter σ -Körper auf X_i (d.h.: es gibt auf X_i eine kompakte Hausdorff-Topologie T_i , deren Baire-mengen die Elemente von A_i sind). Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ das cartesische Produkt der $X_i, i \in I$, mit der nach Tychonoff kompakten Produkttopologie T der $T_i, i \in I$. Für $a_i \subseteq X_i$ sei wieder $\bar{a}_i \subseteq X$ die Menge aller $\varphi \in X$ mit $\varphi(i) \in a_i$ und B_i die Menge aller $\bar{a}_i$ mit $a_i \in A_i$. B_i ist wieder Boole'sche σ -Unteralgebra von $P(X)$ und offenbar zu A_i kanonisch-isomorph.

Seien nun die p_i effektive Verbandsmaße auf den A_i (mit Werten in M) und seien $\bar{p}_i$ die kanonisch-entsprechenden Verbandsmaße auf B_i . Ist B der von den $B_i, i \in I$, erzeugte Körper, so ist B offensichtlich abstraktes Produkt der Boole'schen Algebren $A_i, i \in I$, so daß sich die Homomorphismen $\bar{p}_i, i \in I$, zu einem Homomorphismus $\bar{p}$ von B in M fortsetzen lassen. Um dann zu beweisen, daß $\bar{p}$ sogar σ -Homomorphismus ist (um dann nämlich $\bar{p}$ von B auf den von B erzeugten σ -Körper B_σ , das minimale abstrakte σ -Produkt der $A_i, i \in I$, mit Hilfe des Fortsetzungstheorems fortsetzen zu können), benötigen wir wieder die Approximation der B -Mengen durch offene und kompakte Mengen (in der Produkttopologie) für ein Maß $\bar{\mu}$ auf B , das durch

σ -Maße $\mu_i, i \in I$, auf $A_i, i \in I$, beschränkt ist, also einen Lemma 1 entsprechenden Satz. Dabei heißt analog das Maß $\bar{\mu}$ durch die Maße $\mu_i, i \in I$, beschränkt, falls für alle $i \in I$ gilt: $\bar{\mu}(\bar{a}_i) \leq \mu_i(a_i)$ für $a_i \in A_i$.

Sei zuerst $b = \bar{a}_i$ für ein $i \in I$ und ein $a_i \in A_i$. Es gibt dann ein kompaktes $c_i \in A_i$ und ein offenes $u_i \in A_i$ mit $c_i \subseteq a_i \subseteq u_i$, $\mu_i(u_i - c_i) \leq \varepsilon$ (wobei $\varepsilon > 0$ vorgeschrieben ist), da μ_i als σ -Maß regulär ist. Offenbar ist nun $u =_{\text{df}} \bar{u}_i$ offen und $c =_{\text{df}} \bar{c}_i$ kompakt (in der Produkttopologie), und es gilt: $c, u \in B$, $c \subseteq b \subseteq u$. Da $u - c = \overline{u_i - c_i}$ gilt, folgt: $\bar{\mu}(u - c) \leq \varepsilon$; denn $\bar{\mu}$ ist durch die $\mu_i, i \in I$, beschränkt.

Bekanntlich bildet die Menge der endlichen Durchschnitte der $\bar{a}_i$ mit $a_i \in A_i$ für ein $i \in I$ einen Halbring H , und jedes B -Element ist endliche Vereinigung von H -Elementen.

Sei also nun $b \in H$, also $b = \bigcap_{k=1}^n b_k$, wobei für die $b_k \in B$ angenommen werden kann, daß kompakte $c_k \in B$ und offene $u_k \in B$ mit $c_k \subseteq b_k \subseteq u_k$, $\bar{\mu}(u_k - c_k) \leq \frac{\varepsilon}{n}$ existieren. Offenbar ist $u = \bigcap_{k=1}^n u_k$ offen und $c = \bigcap_{k=1}^n c_k$ kompakt. Weiter gilt $u, c \in B$, $c \subseteq b \subseteq u$ und auch $\bar{\mu}(u - c) \leq \varepsilon$, da $u - c \subseteq \bigcup_{k=1}^n (u_k - c_k)$, also $\bar{\mu}(u - c) \leq \sum_{k=1}^n \bar{\mu}(u_k - c_k)$, da $\bar{\mu}$ als Maß endlich-superadditiv ist.

Sei nun allgemein $b \in B$ beliebig. Dann gibt es $b_k \in H$, $k=1, 2, \dots, n$, mit $b = \bigcup_{k=1}^n b_k$. Zu jedem b_k gibt es ein kompaktes c_k und ein offenes u_k mit

$c_k, u_k \in B$, $c_k \leq b_k \leq u_k$, $\bar{\mu}(u_k - c_k) \leq \frac{\varepsilon}{n}$. Da wieder $u = \bigcup_{k=1}^n u_k$ offen, $c = \bigcup_{k=1}^n c_k$ kompakt ist und $u, c \in B$, $c \leq b \leq u$ gilt und auch $\bar{\mu}(u - c) \leq \varepsilon$ wegen $u - c \in \bigcup_{k=1}^n (u_k - c_k)$, ist die Möglichkeit der Approximation allgemein nachgewiesen.

Nun kann leicht die abzählbare Superadditivität von $\bar{\mu}$ (wie in Lemma 2) durch Anwendung des Heine-Borelschen Satzes auf die endliche zurückgeführt werden, wodurch gezeigt wird, daß $\bar{\mu}$ sogar σ -Maß ist. Damit sind dann beide Lemmata auf den allgemeinen Fall erweitert, so daß die Tatsache, daß $\bar{p}$ Verbandsmaß ist, wieder einfach durch Anwendung derselben auf die Maße $\mu_{\bar{p}}, \mu_{p_i}$ folgt, wobei μ das effektive Maß auf M ist.

Durch Kombination des Resultates für endliche Produkte von lokal-kompakten Verbandsmaßen mit dem Resultat für beliebige Produkte von kompakten Verbandsmaßen ergibt sich der folgende Satz:

Theorem 2: Sei $p_i, i \in I$, Familie von effektiven, topologischen Verbandsmaßen (auf σ -Körpern $A_i, i \in I$), die bis auf endlich-viele sogar kompakt sind. Dann existiert auf jedem abstrakten σ -Produkt A der $A_i, i \in I$, genau ein Verbandsmaß p (das Produkt der $p_i, i \in I$), das die den p_i kanonisch-entsprechenden Verbandsmaße fortsetzt (Produktbildung).

Umgekehrt ist jedes Verbandsmaß p auf dem abstrakten σ -Produkt A der $A_i, i \in I$, eindeutig darstellbar als Produktverbandsmaß von gewissen Verbandsmaßen $p_i, i \in I$, auf den $A_i, i \in I$. (Produktzerlegung).

Beweis:

I. Produktbildung: Nach den obigen Ausführungen ist die Behauptung sicher für das minimale σ -Produkt B_σ richtig. Da auf jedem anderen abstrakten σ -Produkt ein σ -Homomorphismus in B_σ , der die kanonischen Isomorphismen fortsetzt, existiert, gilt sie auch allgemein, was die Existenz betrifft.

Da aber die den A_i kanonisch-entsprechenden σ -Unteralgebren von A die Algebra A σ -erzeugen und zwei Verbandsmaße als σ -Homomorphismen immer auf einer Boole'schen σ -Algebra übereinstimmen, ist auch die Eindeutigkeit klar.

II. Produktzerlegung: Seien $\bar{A}_i$ die den A_i kanonisch-entsprechenden σ -Unteralgebren im abstrakten Produkt A . Ist nun p Verbandsmaß auf A , so seien $\bar{p}_i$ die Spuren von p auf den $\bar{A}_i$ und p_i die den $\bar{p}_i$ kanonisch-entsprechenden Verbandsmaße auf den A_i . Offenbar ist nun p Produkt der $p_i, i \in I$.

E. Die singuläre Zerlegung

Vorbemerkung: Sei S σ -Ring (in einer Boole'schen σ -Algebra) und seien p, q effektive Verbandsmaße auf S (mit Werten in M).

Satz 1: Ein effektives Verbandsmaß p nimmt auf dem σ -Ring S sein Maximum an.

Beweis 1: Sei $d = \bigcup_{a \in S} p(a)$ (M ist vollständig!). Da die Vereinigung in M abzählbar ist, gibt es schon abzählbar-viele $a_i \in S, i=1, 2, \dots$, mit $d = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i)$. Sei $a = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$ (S ist σ -Ring!), so gilt $a \in S$ mit $d = p(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i)$, da p Verbandsmaß ist. Da für jedes $b \in S$ gilt: $p(b) \subseteq d = p(a)$, nimmt p bei $a \in S$ sein Maximum an.

Definition 1: a) prq (p ist regulär bezüglich q) $\equiv_{df}$ Für $a \in S$ mit $q(a) = 0$ ist auch $p(a) = 0$.

b) psq (p ist singulär bezüglich q) $\equiv_{df}$ Für jedes $a \in S$ mit $p(a) \neq 0$ gibt es ein $b \in S, b \subseteq a$ mit $q(b) = 0$ und $p(b) \neq 0$.

Satz 2: $psq \equiv$ Zu jedem $a \in S$ gibt es eine Zerlegung $a = a_1 \cup a_2$, $a_1, a_2 \in S$ mit $q(a_1) = p(a_2) = 0$.

Beweis 2: a) Möge eine solche "singuläre Zerlegung" von a existieren. Offenbar gilt dabei auch: $p(a) = p(a_1)$, $q(a) = q(a_2)$. Ist also $p(a) \neq 0$, so ist auch $p(a_1) \neq 0$ mit $q(a_1) = 0$ und $a_1 \subseteq a$. Also gilt: psq .

b) Sei psq und $a \in S$. Sei $\bar{S} =$

$\{b \in S / b \leq a \text{ und } q(b) = 0\}$ der σ -Ring der q -Nullelemente in a . Betrachten wir die Spur von p auf $\bar{S}$, so nimmt p nach Satz 1 auf $\bar{S}$ sein Maximum an, etwa bei $a_1 \in \bar{S}$. Sei $a_2 = a - a_1$. Dann gilt $a = a_1 \cup a_2$, $a_1, a_2 \in S$ und $q(a_1) = 0$ nach Definition. Nun gilt aber auch $p(a_2) = 0$, so daß a_1, a_2 eine singuläre Zerlegung von a darstellt. Setzen wir nämlich $p(a_2) \neq 0$ voraus, so gibt es ein $b \leq a_2, b \in S$ mit $q(b) = 0$ und $p(b) \neq 0$. Da aber auch $b \in \bar{S}$ gilt, folgt: $p(b) \leq p(a_1)$, also auch $p(b) \cap p(a_1) = p(b)$. Da aber $b \leq a_2$, ist $b \cap a_1 = 0$, also gilt: $p(b) \cap p(a_1) = p(b \cap a_1) = p(0) = 0$, also auch $p(b) = 0$ gegen $p(b) \neq 0$.

Satz 3: $qsp \equiv psq$

Beweis 3: Sofort nach Satz 2 mit der zweiten Charakterisierung.

Satz 4: p kann eindeutig dargestellt werden als

$p = p_s \cup p_r$, wobei p_s, p_r effektive Verbandsmaße sind mit $p_r r q$ und $p_s s q$ (singuläre Zerlegung von p bezüglich q).

Beweis 4: I. Sei $p_s(a) =_{df} \bigcup_{b \in S, q(b)=0, b \leq a} p(b)$
 $= \max_{b \in S, q(b)=0, b \leq a} p(b)$ (Nach Satz 1).

p_s ist Verbandsmaß; denn sei $a = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$ mit $a_i \in S$. Zu jedem a_i gibt es ein $b_i \leq a_i, b_i \in S$ mit $q(b_i) = 0$ und $p_s(a_i) = p(b_i)$. Für $b =_{df} \bigcup_{i=1}^{\infty} b_i$ gilt wieder $q(b) = 0$, $b \leq a$, also auch $p(b) \leq p_s(a)$. Insgesamt also: $\bigcup_{i=1}^{\infty} p_s(a_i) \leq p_s(a)$, da p Verbandsmaß ist.

Sei nun umgekehrt $b \in S, b \subseteq a, q(b) = 0$ und

$p_S(a) = p(b)$. Mit $b_i =_{df} b \cap a_i$ gilt $b_i \subseteq a_i$,

$q(b_i) = 0$, also auch $p(b_i) \subseteq p_S(a_i)$. Da

$b = \bigcup_{i=1}^{\infty} b_i$, folgt aus $p(b) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(b_i)$:

$p_S(a) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} p_S(a_i)$. Also insgesamt: $p_S(a) =$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} p_S(a_i)$. p_S ist also Verbandsmaß.

Offenbar ist $p_S s q$; denn für $a \in S$ gibt es

ein $b \subseteq a, b \in S$ mit $q(b) = 0$ und $p_S(a) = p(b) = p_S(b)$.

Ist also $p_S(a) \neq 0$, so auch $p_S(b) \neq 0$ mit $q(b) = 0$,

$b \subseteq a$. Also: $p_S s q$.

II. Sei nun $p_r(a) =_{df} p(a) - p_S(a)$. p_r ist

dann auch Verbandsmaß, da $p_S(a) \subseteq p(a)$ für $a \in S$ gilt.

Denn sei $a, a_i \in S$, $a = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$. Dann gilt:

$p(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i)$ und $p_S(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p_S(a_i)$, also auch:

$p_r(a) = p(a) - p_S(a) = (\bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i)) - (\bigcup_{j=1}^{\infty} p(a_j)) =$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} (p(a_i) - \bigcup_{j=1}^{\infty} p(a_j)) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} (p(a_i) - p_S(a_j))$.

Offenbar ist nun $p(a_i) - p_S(a_j) = p(a_i)$ für $j \neq i$ (da

$p(a_i), p_S(a_j)$ dann disjunkt sind) und $p(a_i) - p_S(a_j) =$

$p_r(a_i) \subseteq p(a_i)$ für $j = i$. Also gilt: $p_r(a) =$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} p_r(a_i)$. p_r ist also Verbandsmaß.

Offenbar ist auch $p_r r q$. Denn sei $a \in S$,

$q(a) = 0$. Dann gilt $p_S(a) = p(a)$, also $p_r(a) =$

$p(a) - p_S(a) = 0$.

Endlich ist nach Definition auch

$p(a) = p_S(a) \cup p_r(a)$ erfüllt.

III. Sei nun $p = \bar{p}_S \cup \bar{p}_r$, wobei $\bar{p}_S, \bar{p}_r$

Verbandsmaße sind mit $\bar{p}_S s q, \bar{p}_r r q$.

Sei $a \in S$ und a_1, a_2 singuläre Zerlegung von a bezüglich $\bar{p}_s, q$. Dann gilt wegen $q(a_1) = \bar{p}_s(a_2) = 0$:
 $\bar{p}_s(a) = \bar{p}_s(a_1) \subseteq p(a_1) \subseteq p_s(a)$, also insgesamt:
 $\bar{p}_s \subseteq p_s$.

Ist nun $a \in S$ und a_1, a_2 eine singuläre Zerlegung von a bezüglich p_s, q , so gilt wegen
 $q(a_1) = p_s(a_2) = 0$ auch $\bar{p}_r(a_1) = 0$, also:
 $\bar{p}_r(a) = \bar{p}_r(a_2) \subseteq p(a_2)$ und $p_s(a) = p_s(a_1) \subseteq p(a_1)$, also:
 $\bar{p}_r(a) \cap p_s(a) \subseteq p(a_2) \cap p(a_1) = p(a_2 \cap a_1) = p(0) = 0$.
 Da aber $\bar{p}_r(a) \subseteq p(a)$ und disjunkt zu $p_s(a)$ ist, folgt
 $\bar{p}_r(a) \subseteq p_r(a) = p(a) - p_s(a)$.

Wegen $p = p_s \cup p_r$ und $\bar{p}_r \subseteq p_r$, $\bar{p}_s \subseteq p_s$ mit
 $p = \bar{p}_r \cup \bar{p}_s$ gilt $p_s = \bar{p}_s$, $p_r = \bar{p}_r$.

Anmerkung: Offenbar beruht die singuläre Zerlegung weitgehend auf der "Abzählbarkeit" der Vereinigung in M (der "abzählbaren" Supremumbildung bei den reellen Zahlen vergleichbar). Deshalb lassen sich gleichfalls Sätze über die meßbare Hülle und den meßbaren Kern bezüglich des äußeren und inneren σ -Maßes mit Hilfe der "Abzählbarkeit" auf effektive Verbandsmaße übertragen, im allgemeinen aber nicht auf quasi-effektive Verbandsmaße.

F. Der Hilbert - Verband

Sei H die Menge der abgeschlossenen, linearen Teilräume des Hilbert-Raumes X (der beliebigen Dimension $\mathfrak{J}$). H wird durch die Inklusion teilgeordnet und bildet einen vollständigen Verband, den Hilbert-Verband.

Hierbei ist dann 0 der Nullraum $\{0\}$, 1 der ganze Raum X und $\bigcap_{i \in I} a_i$ stimmt mit dem mengentheoretischen Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} a_i$ der a_i , $i \in I$, überein, während $\bigcup_{i \in I} a_i$ als Gl Lin $\bigcup_{i \in I} a_i$ (als topologischer Abschluß der linearen Hülle der mengentheoretischen Vereinigung) darstellbar ist.

H ist für $\mathfrak{J} > 1$ nicht distributiv und im allgemeinen auch nicht modular durch das Auftreten nicht-abgeschlossener linearer Summen. Genauer gilt Folgendes:

Definition 1: (a, b) mit $a, b \in H$ soll modular heißen, falls für alle $c \in H$ mit $a \subseteq c$ gilt: $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c$. (Offensichtlich ist H genau dann modular, falls alle (a, b) mit $a, b \in H$ modular sind).

Satz 1: (a, b) ist genau dann modular, wenn die Summe $a+b$ ($= \text{Lin}(a \cup b)$) abgeschlossen ist (d.h. also $a \cup b = a+b$ gilt).

Beweis 1: I. Sei $a+b$ abgeschlossen, also $a \cup b = a+b$. Sei nun $c \in H$, $a \subseteq c$. Offenbar gilt: $a \cup (b \cap c) \subseteq (a \cup b) \cap c$, so daß nur $(a \cup b) \cap c \subseteq a \cup (b \cap c)$ zu beweisen

bleibt. Sei also $x \in (a \cup b) \cap c$. Dann gilt $x \in c$. Weiter folgt: $x \in a \cup b = a + b$, also $x = y + z$ mit $y \in a$, $z \in b$. Da $x \in c$ und auch $y \in a \subseteq c$ ist auch $z = x - y \in c$, also sogar $z \in b \cap c$. Wegen $x = y + z$ mit $y \in a$, $z \in b \cap c$ ist also $x \in a + (b \cap c) \subseteq a \cup (b \cap c)$.

II. Sei nun $a + b$ nicht-abgeschlossen, also $a + b \subsetneq a \cup b$. Dann gibt es ein $x \in a \cup b$ mit $x \notin a + b$. Sei $\bar{x}$ der von x erzeugte (eindimensionale) Unterraum und sei $c =_{\text{df}} a \cup \bar{x} = a + \bar{x}$ (da $\bar{x}$ endlich-dimensional, s.u.). Nun gilt: $b \cap c = b \cap a$. Sei nämlich $y \in b \cap c$. Dann gilt $y \in b$. Da $y \in c$ ist, gibt es ein $z \in a$ mit $y = z + \lambda x$ ($c = a + \bar{x}$!). Da dann aber $\lambda x \notin a + b$ ist, muß $\lambda = 0$ sein, da $x \notin a + b$ ist. Also gilt $y = z \in a$, also $y \in b \cap a$, also $b \cap c \subseteq b \cap a$. Da offenbar $b \cap a \subseteq b \cap c$, da $a \subseteq c$ gilt, folgt: $b \cap c = b \cap a$.

Also insgesamt: (a, b) ist nicht-modular, da nicht $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c$, obwohl $a \subseteq c$ ist. Denn $a \cup (b \cap c) = a \cup (b \cap a) = a$ und $(a \cup b) \cap c = c$ und $a \neq c$.

Sei nun a' für $a \in H$ der zu a totalsenkrechte Raum $\perp a$. Durch $'$ wird H zu einem orthokomplementären Verband. Es gilt nämlich:

1. $a \cup a' = 1$, $a \cap a' = 0$.
2. $a'' = a$.
3. $a \subseteq b \Rightarrow a' \supseteq b'$.
4. $(a \cup b)' = a' \cap b'$, $(a \cap b)' = a' \cup b'$ usw.

Nach 2., 3. ist $'$ ein Isomorphismus zwischen dem Hilbertverband und seinem dualen Verband.

$a \perp b$ soll heißen $a \subseteq b'$ ($\equiv b \subseteq a'$) und stimmt mit dem gewöhnlichen Orthogonalitätsbegriff überein.

Sind P_a, P_b die Projektoren zu a, b , so gilt:

$a \perp b \equiv P_a P_b = 0$. In diesem Fall ist $P_{a \cup b} = P_a + P_b$.

$a \circ b$ (a kompatibel mit b) soll heißen:

$a = (a \cap b) \cup (a \cap b')$. Es ist bekannt, daß:

$a \circ b \equiv P_a P_b = P_b P_a \equiv P_a b \subseteq b \equiv b \circ a \equiv a \circ b'$. Für

kompatible a, b gilt weiter: $P_{a \cup b} + P_{a \cap b} = P_a + P_b$ und

$P_{a \cap b} = P_a P_b$.

Satz 2: a) Sind A, B lineare Unterräume von X mit $A \perp B$, so gilt: $A+B$ ist genau dann abgeschlossen, wenn die A, B abgeschlossen sind.

b) Für $a, b \in H$ ist $a+b$ genau dann abgeschlossen, wenn P_a, b abgeschlossen ist.

c) Insbesondere ist $a+b$ abgeschlossen, falls $a \perp b$, $a \circ b$ oder a oder b endlich-dimensional ist.

d) H ist also genau dann modular, wenn die Dimension $\mathfrak{V}$ endlich ist.

Beweis 2: a) Trivial mit Hilfe der orthogonalen Zerlegung.

b) Offenbar ist $a+b = a + P_a, b$, also nach a) genau dann abgeschlossen, wenn P_a, b abgeschlossen ist.

c) Falls $a \perp b$ ist, ist $a+b$ nach a) abgeschlossen. $a+b$ ist sogar schon abgeschlossen, falls $a \circ b$. Denn dann sind $a - (a \cap b)$, $a \cap b$, $b - (a \cap b)$ paarweise orthogonal, und es gilt:

$a+b = (a-(a \cap b)) + (a \cap b) + (b-(a \cap b))$. (Dabei soll für $a, b \in H$ gelten: $a-b =_{df} a \cap b'$) .

d) Bei einer endlichen Dimension $\mathcal{V}$ sind alle linearen Summen abgeschlossen und bei unendlichem $\mathcal{V}$ gibt es bekanntlich nicht-abgeschlossene Summen.

Seien nun $R, S, T, \dots$ Teilmengen von H .

S heißt kompatibel, falls für alle $a, b \in S$ gilt: $a \circ b$.

S heißt Teilverband, falls gilt: .

1. $0, 1 \in S$.
2. $a, b \in S \rightarrow a \cup b, a \cap b \in S$.
3. $a \in S \rightarrow a' \in S$.

Satz 3: Ein Teilverband S ist genau dann distributiv (und damit Boole'sche Algebra in H , d.h. Boole'sche Unter algebra von H), wenn S kompatibel ist.

Beweis 3: I. Sei S distributiv: Für $a, b \in S$ gilt dann: $a = a \cap 1 = a \cap (b \cup b') = (a \cap b) \cup (a \cap b')$, also $a \circ b$.

II. Sei S kompatibel. Für $a, b, c \in S$ gilt dann: $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$ (S ist also distributiv).
Denn da $a, b, c, b \cup c, a \cap b, a \cap c \in S$ sind und S kompatibel ist, gilt: $P_{a \cap (b \cup c)} = P_a P_{b \cup c} = P_a (P_b + P_c - P_b P_c) = P_a P_b + P_a P_c - P_a P_b P_c$ und $P_{(a \cap b) \cup (a \cap c)} = P_{a \cap b} + P_{a \cap c} - P_{a \cap b} P_{a \cap c} = P_a P_b + P_a P_c - P_a P_b P_a P_c = P_a P_b + P_a P_c - P_a P_b P_c$, also: $P_{a \cap (b \cup c)} = P_{(a \cap b) \cup (a \cap c)}$, also auch: $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$.

Satz 4: Sei $a_i \in H$ für $i \in I$. Gilt $a_i \circ b \in H$ für alle $i \in I$, so auch $(\bigcap_{i \in I} a_i) \circ b$ und $(\bigcup_{i \in I} a_i) \circ b$.

Beweis 4: I. $a_i \circ b$ für alle $i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} a_i \leq a_i$ für alle $i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} (\bigcap_{i \in I} a_i) \leq a_i$ für alle $i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} (\bigcap_{i \in I} a_i) \leq \bigcap_{i \in I} a_i \Rightarrow (\bigcap_{i \in I} a_i) \circ b$.

II. $a_i \circ b$ für $i \in I \Rightarrow a_i' \circ b$ für $i \in I \Rightarrow (\bigcap_{i \in I} a_i') \circ b \Rightarrow (\bigcap_{i \in I} a_i')' \circ b \Rightarrow (\bigcup_{i \in I} a_i) \circ b$.

Für beliebiges S sei $\bar{S}$ der kleinste S enthaltende vollständige Teilverband (der von S erzeugte vollständige Teilverband) und S^+ (der Kommutant von S) sei definiert durch $S^+ = \{a \in H / \text{Für alle } b \in S \text{ gilt } a \circ b\}$.

S heiße saturiert, falls S maximal kompatibel ist (d.h.: S ist kompatibel, und für alle kompatiblen T mit $S \subseteq T$ gilt $S=T$). Nach Tukey's Maximalmengentheorem gibt es über jedem kompatiblen S ein saturiertes T .

Satz 5: a) Es gilt: 1. $S \subseteq T \Rightarrow T^+ \subseteq S^+$
2. $S \subseteq S^{++}$
3. $S^+ = S^{+++}$

b) Der Kommutant S^+ ist vollständiger Teilverband.

c) 1. S ist kompatibel $\Leftrightarrow S \subseteq S^+$.

2. S ist saturiert $\Leftrightarrow S = S^+ \Rightarrow S$ ist vollständige Boole'sche Algebra.

d) Ist S kompatibel, so ist $\bar{S}$ vollständige Boole'sche Algebra in H .

e) S ist Kommutant (d.h. $S = T^+$ für ein $T \subseteq H$)
 $\equiv S$ ist Bikommutant (d.h. $S = T^{++}$ für ein $T \subseteq H$) $\equiv$
 $S = S^{++}$.

Beweis 5: a) 1.2. trivial.

3. Nach 2. gilt: $S \subseteq S^{++}$, also nach 1.:
 $(S^{++})^+ \subseteq S^+$. Nach 2. gilt aber für S^+ : $(S^+) \subseteq (S^+)^{++}$,
 also insgesamt: $S^+ = S^{+++}$.

b) 1. Offenbar gilt: $0, 1 \in S^+$.

2. Aus $a \in S^+ \rightarrow a \circ b$ für $b \in S \rightarrow a' \circ b$ für
 $b \in S \rightarrow a' \in S^+$.

3. Aus $a_i \in S^+$ für $i \in I \rightarrow a_i \circ b$ für $i \in I$
 und $b \in S \rightarrow (\bigcap_{i \in I} a_i), (\bigcup_{i \in I} a_i) \circ b$ für alle $b \in S$
 (nach Satz 4) $\rightarrow (\bigcap_{i \in I} a_i), (\bigcup_{i \in I} a_i) \in S^+$.

S^+ ist also vollständiger Teilverband.

c) 1. trivial.

2.I. Sei S saturiert: Da S kompatibel,
 gilt $S \subseteq S^+$. Sei nun $a \in S^+$. Dann ist auch $S \cup \{a\}$
 kompatibel, also gilt $S = S \cup \{a\}$, also $a \in S$.
 Also gilt $S^+ \subseteq S$, also $S = S^+$.

II. Sei $S = S^+$. Wegen $S \subseteq S^+$ ist dann
 S kompatibel. Sei nun T kompatibel, also $T \subseteq T^+$, und
 $S \subseteq T$. Es gilt dann: $T^+ \subseteq S^+$, also $T \subseteq T^+ \subseteq S^+ = S$,
 also $T \subseteq S$, also $T = S$. S ist also maximal kompatibel,
 also saturiert.

III. Ist nun S saturiert, so ist S
 wegen $S = S^+$ vollständiger Teilverband und kompatibel,
 also vollständige Boole'sche Algebra in H .

d) Ist S kompatibel, so gibt es ein saturiertes T mit $S \subseteq T$. Da T nach c) ein vollständiger, kompatibler Teilverband ist, gilt $\bar{S} \subseteq T$. Daher ist $\bar{S}$ auch kompatibel, also vollständige Boole'sche Algebra in H .

e) Sei $S = S^{++}$. Dann ist S offenbar auch Bikommutant.

Sei S Bikommutant, also $S = T^{++}$ für ein $T \subseteq H$. Dann ist S offenbar auch Kommutant.

Sei nun S Kommutant, also $S = T^+$ für ein $T \subseteq H$. Wegen $T^+ = (T^+)^{++}$ gilt dann $S = S^{++}$.

Die Aussagen des obigen Satzes erinnern an den von Neumann'schen Formalismus für abgeschlossene, selbstadjungierte und symmetrische Operatoren. Man wird also auch nach der Gültigkeit von $\bar{T} = T^{++}$ fragen (Es gilt immer $\bar{T} \subseteq T^{++}$!), oder äquivalent: Wann ist S Bikommutant (Kommutant)?

Jeder Kommutant ist vollständiger Teilverband, aber allgemein ist nicht jeder vollständige Teilverband Kommutant. Trotzdem ist zumindest jeder kompatible, vollständige Teilverband Kommutant. Dies sollen die folgenden Sätze zeigen.

Satz 6: Ist S Kommutant und sind $a, b \in S$ eindimensionale, nicht-zueinander-orthogonale und nicht-identische Unterräume, so gilt für jedes eindimensionale $c \subseteq a \cup b$ (jede Gerade in der Ebene $a \cup b$) auch $c \in S$.

Beweis 6: Sei etwa $S = T^+$ und $e \in T$. Wegen $a \in S$ gilt $a \cap e$, also $a = (a \cap e) \cup (a \cap e')$. Da aber a

eindimensional ist, gilt entweder $a \cap e = 0$ oder $a \cap e' = 0$, also entweder $a \subseteq e'$ oder $a \subseteq e$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $a \subseteq e$ an. Dann gilt auch $b \subseteq e$, da ebenfalls entweder $b \subseteq e$ oder $b \subseteq e'$ gilt, da $b \cap e = 0$, aber $b \subseteq e'$ der Voraussetzung, daß nicht $a \perp b$ ist, widerspricht. Daher gilt auch $c \subseteq a \cup b \subseteq e$, also $c \cap e = 0$. Also auch $c \in S = T^+$.

Man kann nun aber leicht einen vollständigen Teilverband S konstruieren, der eindimensionale, nicht-zueinander-orthogonale und nicht-identische a, b enthält, nicht aber jedes $c \subseteq a \cup b$, nämlich einfach den von solchen a, b erzeugten (der nur endlich-viele Elemente besitzt).

Anmerkung 1: Die Kommutanten können allerdings mit Hilfe der Theorie der normierten Algebren charakterisiert werden: S ist genau dann Kommutant, falls es eine schwach-abgeschlossene, symmetrische Algebra mit Einselement von Operatoren des Hilbert-Raumes gibt, so daß S die Gesamtheit der Unterräume der Projektoren in der Algebra ist.

Für den kompatiblen Fall beweisen wir das folgende Lemma.

Satz 7: Sei T Boole'sche σ -Algebra in H und sei $b \in T^{++}$. Für (x, y) mit $x \in b$, $y \in b'$ gibt es ein $a_{x,y} \in T$ mit $x \in a_{x,y}$ und $y \in a_{x,y}'$.

Beweis 7: Nach dem Darstellungssatz von Loomis gibt es eine Menge M , einen (Mengen-)Körper K auf M und einen

σ -Homomorphismus φ von K auf T . Für jedes $x \in X$ ist μ_x (definiert durch: $\mu_x(E) = \langle P_{\varphi(E)} x, x \rangle$ für $E \in K$) ein σ -Maß auf K . Der gesamte Funktionalkalkül mit meßbaren, komplexen Funktionen und normalen Operatoren kann wie auf der reellen Achse entwickelt werden. Wir bezeichnen den normalen (nicht notwendig beschränkten) Operator zur meßbaren, komplexen Funktion f auf M mit $f(\varphi)$ (also: $f(\varphi) =_{df} \int f(\lambda) dP_{\varphi(\lambda)}$).

Bekanntlich bildet für ein $z \in X$ die Gesamtheit aller $f(\varphi)z$ mit $f \in L^2(\mu_z)$ einen Unterraum $c \in T^+$. Da $P_b z \in c$ (denn $c \cap b = \emptyset$, da $c \in T^+$, $b \in T^{++}$, also $P_b c \subseteq c$. Da $z \in c$ ist, gilt also: $P_b z \in c$), gibt es ein $f \in L^2(\mu_z)$ mit $f(\varphi)z = P_b z$.

Sei nun speziell $z = x+y$. Es gilt dann also: $f(\varphi)(x+y) = x$, da $P_b z = P_b(x+y) = x$. Da $b \in T^+$ ($T \subseteq T^+ \curvearrowright T^{++} \subseteq T^+$), ist P_b mit $f(\varphi)$ vertauschbar. Es gilt also: $x = P_b x = P_b f(\varphi)(x+y) = f(\varphi)P_b(x+y) = f(\varphi)x$ und deshalb auch: $f(\varphi)y = 0$.

Sei nun $E = \{\lambda \in M / f(\lambda) \neq 0\}$, χ_E die charakteristische Funktion von E , $a =_{df} \varphi(E)$, also $P_a = \chi_E(\varphi)$. Da $f(\varphi)y = 0$, gilt auch: $\|f(\varphi)y\|^2 = \int |f(\lambda)|^2 d\mu_y(\lambda) = 0$. Aus $\int_E |f(\lambda)|^2 d\mu_y(\lambda) = 0$ folgt: $\mu_y(E) = 0$. Dann ist aber auch $\|\chi_E(\varphi)(y)\|^2 = \int |\chi_E(\lambda)|^2 d\mu_y(\lambda) = \mu_y(E) = 0$, also $P_a y = \chi_E(\varphi)y = 0$, also $y \in a'$.

Es bleibt nur noch $x \in a$, also $P_a x = x$, zu beweisen. Nun gilt aber $x = f(\varphi)x$, also folgt: $P_a x = P_a f(\varphi)x = \chi_E(\varphi)f(\varphi)x = (\chi_E f)(\varphi)x = f(\varphi)x = x$.

Satz 8: Ist T kompatibel, so ist T genau dann Kommutant, wenn T vollständiger Teilverband ist.

Beweis 8: I. Ein Kommutant ist stets ein vollständiger Teilverband.

II. Sei nun T kompatibler, vollständiger Teilverband. T ist dann sicher eine Boole'sche σ -Algebra in H . Sei also $b \in T^{++}$. Nach Satz 7 gibt es also ein $a_{x,y} \in T$ für $x \in b$, $y \in b'$ mit $x \in a_{x,y}$, $y \in a_{x,y}'$. Sei nun $a_y = \bigcup_{x \in b} a_{x,y}$. Es gilt $a_y \in T$, da T vollständig ist. Weiter ist $b \subseteq a_y$ und $y \in a_y'$. Sei nun $a = \bigcap_{y \in b'} a_y$. Wieder ist $a \in T$ und offenbar $b \subseteq a$. Wegen $a' = \bigcup_{y \in b'} a_y'$ gilt aber auch $b' \subseteq a'$, also $a \subseteq b$, also $a=b$. Also gilt $b = a \in T$. Damit ist $T^{++} = T$.

Anmerkung 2: Satz 8 ist eine verbandstheoretische Verallgemeinerung des bekannten operatortheoretischen Vertauschungstheorems: Ist der normale Operator B mit allen (beschränkten) Operatoren C vertauschbar, die mit dem normalen Operator A vertauschbar sind, so ist B Funktion von A . Das Vertauschungstheorem folgt durch Anwendung von Satz 8 auf die Boole'schen Spektralalgebren der Operatoren A, B .

Satz 9: Sei $x \in \bigcup_{i \in I} I^{a_i}$, $a_i \in H$. Dann gibt es schon abzählbar-viele a_{i_k} , $k=1,2,\dots$, mit $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} I^{a_{i_k}}$.

Beweis 9: Da $\bigcup_{i \in I} I^{a_i} = \text{Cl Lin}^{(M)}_{i \in I} I^{a_i}$ gilt, gibt es $x_n \in \text{Lin}^{(M)}_{i \in I} I^{a_i}$, $n=1,2,\dots$, mit $x_n \rightarrow x$. Jedes x_n

ist Linearkombination von endlich-vielen Vektoren aus $\bigcup_{i \in I} a_i$, also schon in der linearen Hülle von endlich-vielen Räumen a_i , $i \in I$. Alle x_n sind daher schon in der linearen Hülle von abzählbar-vielen der a_i , $i \in I$, die etwa durch a_{i_k} , $k=1,2,\dots$, durchnummeriert seien. Wegen $x_n \in \bigcup_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$ für alle $n=1,2,\dots$ ist aber auch $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$.

Satz 10: Sei X Hilbert-Raum der transfiniten Dimension $\mathfrak{J}$:

- a) Sei $a_i \in H$ für $i \in I$ und $I \neq \emptyset$. Dann gibt es Unter-mengen $I', I'' \subseteq I$ mit Mächtigkeiten kleiner als $\mathfrak{J}$, für die gilt: $\bigcup_{i \in I} a_i = \bigcup_{i \in I'} a_i$, $\bigcap_{i \in I} a_i = \bigcap_{i \in I''} a_i$.
- b) $\mathfrak{J}$ ist die kleinste Kardinalzahl, die diese Eigenschaft bezüglich der Vereinigung und des Durchschnittes in H hat (Verbandstheoretische Kennzeichnung der Dimension).

Beweis 10: a) Sei $a = \bigcup_{i \in I} a_i$. Da X die Dimension $\mathfrak{J}$ hat, gibt es schon eine Familie $x_l, l \in L$, wobei L eine Mächtigkeit kleiner als $\mathfrak{J}$ hat, die a aufspannt $(a = \text{Cl Lin } \{x_l\}_{l \in L})$. Nach Satz 9 ist jeder Vektor x_l schon in der Vereinigung von abzählbar-vielen der a_i , $i \in I$. Also gibt es ein $I' \subseteq I$ mit einer Mächtigkeit kleiner als $\mathfrak{J}$, so daß $x_l \in \bigcup_{i \in I'} a_i$ gilt für alle $l \in L$. Dann gilt aber auch $a \subseteq \bigcup_{i \in I'} a_i$, also auch $\bigcup_{i \in I} a_i = \bigcup_{i \in I'} a_i$.

Nach dem eben Bewiesenen gilt nun auch $\bigcup_{i \in I} a_i = \bigcup_{i \in I''} a_i$ mit einem $I'' \subseteq I$ der Mächtigkeit kleiner als $\mathfrak{J}$. Dann gilt aber: $\bigcap_{i \in I} a_i = \bigcap_{i \in I''} a_i$.

b) Sei x_i , $i \in I$, ein Orthonormalsystem der Mächtigkeit $\mathcal{V}$ in X und seien $\bar{x}_i$ die eindimensionalen Unterräume zu x_i . Dann gilt für keine echte Untermenge $I' \subsetneq I$: $\bigcup_{i \in I'} \bar{x}_i = \bigcup_{i \in I} \bar{x}_i$. $\mathcal{V}$ ist also wirklich die minimale Mächtigkeit, die a) erfüllt.

Satz 11: Sei T eine vollständige Boole'sche Algebra in H und sei μ_x für $x \in X$ definiert durch $\mu_x(a) = \langle P_a x, x \rangle$ für $a \in T$.

a) μ_x ist ein vollkommenes Maß auf T .

b) Sei D eine in X dichte Menge von Vektoren.

Dann ist das System μ_x , $x \in D$, effektiv auf T . T ist also quasi-effektiv.

c) Sei X Hilbertraum der transfiniten Dimension $\mathcal{V}$. Dann gibt es eine effektive Familie von vollkommenen Maßen der Mächtigkeit $\mathcal{V}$ auf T .

d) Ist X insbesondere separabel, so ist T sogar effektiv.

Beweis 11: a) Sei $a, b \in T$, $a \cap b = 0$. Da T kompatibel ist, gilt sogar $a \perp b$, also auch $P_{a \cup b} = P_a + P_b$, also auch:

$$\mu_x(a \cup b) = \mu_x(a) + \mu_x(b). \text{ Da weiter offenbar}$$

$$\mu_x(a) = \langle P_a x, x \rangle = \|P_a x\|^2 \geq 0 \text{ gilt, ist } \mu_x \text{ Maß}$$

auf T . Analog folgt die σ -Additivität. μ_x ist also sogar σ -Maß.

Sei nun $a = \bigcup_{i \in I} a_i$, $a, a_i \in T$. Da $P_a x \in a$ gilt, gibt es schon abzählbar-viele a_{i_k} mit $P_a x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$. Mit $b = \text{df } \bigcup_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$ gilt also: $b \in T$, $b \subseteq a$, und $P_b P_a x = P_a x$. Da aber wegen $b \subseteq a$

gilt: $P_b P_a = P_b$, folgt $P_b x = P_a x$, also auch

$\mu_x(b) = \mu_x(a)$. Da nun das σ -Maß μ_x nach oben stetig ist, gibt es für ein vorgeschriebenes $\varepsilon > 0$ ein n mit

$$|\mu_x(a) - \mu_x(\bigcup_{k=1}^n a_{i_k})| = |\mu_x(b) - \mu_x(\bigcup_{k=1}^n a_{i_k})| \leq \varepsilon.$$

Insgesamt also: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es endlich-viele

$$a_{i_k}, k=1, 2, \dots, n, \text{ mit } |\mu_x(a) - \mu_x(\bigcup_{k=1}^n a_{i_k})| \leq \varepsilon.$$

Daraus folgt nun sofort durch Dualisierung

und Spezialisierung: Sei $a_i \in T$ mit $\bigcap_{i \in I} a_i = 0$. Für

ein $\varepsilon > 0$ gibt es schon endlich-viele $a_{i_k}, k=1, 2, \dots, n$,

mit $\mu_x(\bigcap_{k=1}^n a_{i_k}) \leq \varepsilon$. μ_x ist also ein vollkommenes

Maß.

b) Sei nämlich $a \in T$ und $\mu_x(a) = 0$ für $x \in D$.

Dann gilt also: $\langle P_a x, x \rangle = 0$ für alle $x \in D$. Sei nun

$y \in X$ beliebig. Es gibt dann $x_n \in D$ mit $x_n \rightarrow y$. Daher

gilt $\langle P_a y, y \rangle = 0$ für alle $y \in X$, also auch $P_a = 0$,

also $a=0$.

c) Ist $\mathcal{V}$ nämlich transfinit, dann gibt es

eine in X dichte Menge D von Vektoren der Mächtigkeit $\mathcal{V}$.

d) Ist X separabel, so gibt es ein abzähl-

bares, effektives System $\mu_i, i=1, 2, \dots$, von normierten

Maßen auf T . μ definiert durch $\mu(a) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \mu_i(a)$,

wobei $\eta_i > 0$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i = 1$ gilt, ist dann ein

effektives, normiertes Maß auf T .

Satz 12: Sei B eine beliebige Boole'sche σ -Algebra,

p eine Abbildung von B in H und P die kanonisch-ent-

sprechende Abbildung von B in die Menge der Projektoren.

Dann gilt:

P ist genau dann Projektionsmaß auf B , wenn p Verbandsmaß auf B mit Werten in einer vollständigen Boole'schen Algebra in H ist. Offensichtlich ist p dann ein quasi-effektives (und im separablen Fall sogar ein effektives) Verbandsmaß.

Beweis 12: I. Sei P Projektionsmaß, d.h. sei P_x (definiert durch $P_x(a) = \langle P(a)x, x \rangle$ für $a \in B$) σ -Maß auf B für jedes $x \in X$.

1. Sei nun $a, b \in B$, $a \cap b = 0$. Wegen $a \cup b = a \dot{\cup} b$ gilt:
 $P_x(a \cup b) = P_x(a) + P_x(b)$ für alle $x \in X$, also auch:
 $P(a \cup b) = P(a) + P(b)$. Da die Summe der Projektoren $P(a), P(b)$ wieder ein Projektor ist, gilt $P(a)P(b) = 0$, oder äquivalent: $p(a) \perp p(b)$.

2. Sei nun $a, b \in B$ beliebig. Wegen $a = (a-b) \dot{\cup} (a \cap b)$,
 $b = (b-a) \dot{\cup} (a \cap b)$ gilt: $P(a)P(b) =$
 $(P(a-b) + P(a \cap b))(P(b-a) + P(a \cap b)) = P(a \cap b) = P(b)P(a)$,
 also $p(a) \circ p(b)$.

3. Sei nun $T = \{a \in H / a = p(b) \text{ mit } b \in B\}$. Nach 2. ist T kompatibel, also ist $\bar{T}$ eine vollständige Boole'sche Algebra in H . p ist nun offenbar eine Abbildung von B in eine vollständige Boole'sche Algebra in H .

4. Sei nun $a = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$ mit $a, a_i \in B$. Dann gilt (da P_x nach Voraussetzung σ -Maß ist): $\langle P(a)x, x \rangle =$
 $\sum_{i=1}^{\infty} \langle P(a_i)x, x \rangle$ für $x \in X$, also nach 1. auch:
 $p(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i)$.

p ist also Verbandsmaß mit Werten in $\bar{T}$.

II. Sei nun p Verbandsmaß mit Werten in einer vollständigen Boole'schen Algebra in H . Für $a, a_i \in B$ mit $a = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$ gilt dann $p(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p(a_i)$. Da die $p(a_i)$ aber kompatibel sind, sind sie sogar paarweise orthogonal: $p(a) = \biguplus_{i=1}^{\infty} p(a_i)$. Dann gilt aber auch $P(a) = \sum_{i=1}^{\infty} P(a_i)$ (starke Summe), also auch: $P_x(a) = \sum_{i=1}^{\infty} P_x(a_i)$. Die P_x sind für $x \in X$ also wirklich σ -Maße auf B , P ist also Projektionsmaß.

Damit ist der Zusammenhang von Projektionsmaß und Verbandsmaß vollständig dargelegt.

L i t e r a t u r

- A c h i e s e r , N.I. und G l a s m a n n , I.M.
1. Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum, 1960
- B i r k h o f f , G.
1. Lattice Theory, 1948
- C a r a t h é o d o r y , G.
1. Maß und Integral und ihre Algebraisierung, 1956
- D i x m i e r , J.
1. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, 1957
- H a h n , H. und R o s e n t h a l , A.
1. Set Functions, 1948
- H a l m o s , P.R.
1. Measure Theory, 1950
2. Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity, 1957
- H e r m e s , H.
1. Einführung in die Verbandstheorie, 1955
- J o r d a n , P.
1. Zum Dedekind'schen Axiom in der Theorie der Verbände, Abhandlungen d.Math.Seminars d.Universität Hamburg, 16, 1949
2. Zur Quantenlogik, Arch.Math.2, 1950
- K a p l a n s k y , I.
1. Projections in Banach Algebras, Ann.of Math. 1951
- K a p p o s , D.
1. Strukturtheorie der Wahrscheinlichkeitsfelder und -räume, 1960
- K e l l e y , J.L.
1. General Topology, 1953
- L o é v e , M.
1. Probability Theory, 1960
- L o o m i s , L.H.
1. An Introduction to Abstract Harmonic Analysis, 1953
2. The lattice theoretic background of the dimension theory of Operator Algebras, Memoirs of the A.M.S., 1955

3. On the representation of σ -complete Boolean Algebras, Bull.Amer.Math.Soc.53, 1947

L o r c h , E.R.

1. On a calculus of operators in reflexive vector spaces, Trans.Amer.Math.Soc.Bd.42, 1939

L u d w i g , G.

1. Grundlagen der Quantenmechanik, 1954

M a c k e y , G.W. und K a k u t a n i , S.

1. Ring and lattice characterization of complex Hilbert Space, Bull.A.M.S.52, 1946

N a k a n o , H.

- 1.a. Zur Eigenwerttheorie normaler Operatoren
b. Über abelsche Ringe von Projektionsoperatoren
c. Funktionen mehrerer hypermaximaler, normaler Operatoren
Proc.Phys.Math.Soc.Jap.III.Series, Bd.21, 1939
2. Unitärinvarianten im allgemeinen euklidischen Raum, Math.Ann.1941/43

N a t a n s o n , I.P.

1. Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, 1961

v. N e u m a n n , J.

1. Functional Operators, 1950

N e u m a r k , M.A.

1. Normierte Algebren, 1959

N i k o d y m , O.M.

1. Un nouvel appareil mathématique pour la théorie des quantas, Annales de l'institut Henri Poincaré, Volume XI, 1949
2. Tribus de Boole et fonctions mesurables, C.R. Acad.Science 228, 1949

R i c k a r t , C.E.

1. General Theory of Banach Algebras, 1960

R i e s z , F. und Sz.N a g y , B.

1. Vorlesungen über Funktionalanalysis, 1956

M c S h a n e , E.J.

1. Integration Theory, 1947
2. Order preserving maps and integration theory, 1953

S i k o r s k i , R.

1. The integral in a Boolean Algebra
Coll.Math.2, 1949
2. On an analogy between measure and homomorphism
Ann.Soc.Pol.Math.23, 1950
3. Boolean Algebras, 1960

S t o n e , M.H.

1. Linear transformations in Hilbert Space and
their application to analysis, 1932

S z. N a g y , B.

1. Spektraldarstellung linearer Transformationen
im Hilbertschen Raum, 1942

T a y l o r , A.E.

1. Functional Analysis, 1958

W e c k e n , F.

1. Abstrakte Integrale und fastperiodische Funktionen,
Math.Zeitschrift, Bd.45, 1939
2. Unitärinvarianten selbstadjungierter Operatoren,
Math.Ann., Bd.116, 1939

Berlin, den 28. Oktober 1962

L e b e n s l a u f

Am 11. Januar 1939 wurde ich in Berlin-Dahlem geboren. Meine Kindheit und Grundschulzeit verbrachte ich zum größten Teil auf dem Lande und besuchte anschließend von der 7. bis zur 13. Klasse die Paulsen-Oberschule in Berlin-Steglitz.

Nach bestandenem Abitur ließ ich mich im Frühjahr 1957 an der Freien Universität Berlin immatrikulieren. Hier habe ich dann, von einem halbjährigen Aufenthalt in Frankreich im Winter 1959/60 abgesehen, 10 Semester ununterbrochen Mathematik studiert. Im Frühjahr 1961 legte ich die Diplom-Vorprüfung mit dem Prädikat "sehr gut" ab, ließ mir anschließend sofort meine Diplomarbeit mit dem Titel "Die δ -Maßfortsetzung" geben und bestand die Diplomprüfung im Frühjahr 1962 "mit Auszeichnung".

Schon im Anschluß an ein Seminar unter der Leitung von Herrn Professor Pachale über Operatoren im Hilbertschen Raum im Frühjahr 1961 und während des Anfertigens meiner Diplomarbeit beschäftigte ich mich mit der Möglichkeit, eine rein maß- und verbandstheoretische Theorie des Projektionsmaßes aufzubauen. Dies führte zu meiner Dissertation, die ich noch während der Semesterferien im Anschluß an das Sommersemester 1962 fertigstellen konnte.

Während der ersten Semester beschäftigte ich mich vor allem mit Analysis bei Herrn Professor Dinghas und Algebra bei Herrn Professor Ostmann. Später hörte ich dann hauptsächlich topologische

Vorlesungen bei Herrn Professor Grottemeyer und
funktionalanalytische bei Herrn Professor Pachale,
unter dessen Anleitung ich dann auch Diplomarbeit
und Dissertation schrieb.

Außerhalb meines eigentlichen Mathematik-
studiums habe ich mich noch sehr viel mit mathe-
matischer Logik, alten und neuen Sprachen sowie
theoretischer Physik beschäftigt.

